



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

### Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

### About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



## Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

## Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

- + *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.
- + *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.
- + *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.
- + *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

## Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter <http://books.google.com> durchsuchen.



510.5

A. G. 72







# Archiv

der

## Mathematik und Physik

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren  
Unterrichtsanstalten.

---

Herausgegeben

von

**Johann August Grunert,**

Professor zu Greifswald.

**Sechsendvierzigster Theil.**

Mit neun lithographirten Tafeln.

---

**Greifswald.**

**C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung,  
Th. Kunike.**

**1866.**

162473

162473 : 162473



## II

Nr. der Abhandlung.	Heft. Seite.
<b>XIX. Ueber die Summe:</b>	
$a^3 + (a+d)^3 + (a+2d)^3 + \dots + (a+nd)^3.$	
Von dem Herausgeber . . . . .	III. 326
<b>XIX. Ueber die Summe:</b>	
$\left\{ \frac{1.2}{1.2} \right\}^2 + \left\{ \frac{2.3}{1.2} \right\}^2 + \left\{ \frac{3.4}{1.2} \right\}^2 + \dots + \left\{ \frac{n(n+1)}{1.2} \right\}^2.$	
Von dem Herausgeber . . . . .	III. 327
<b>Druckfehler in Schrön's siebenstelligen Logarithmentafeln (No. 18. und No. 19.) . . . . .</b>	
	III. 360
<b>XXII. Ueber die Zerlegung einer ganzen rationalen Funktion in Faktoren. Von Herrn Professor C. A. Bretschneider am Gymnasium zu Gotha . . . . .</b>	
	IV. 422
<b>XXV. Schreiben des Herrn Professor Dr. Ligowski in Berlin an den Herausgeber, betreffend die Aufgabe in Theil XLV. S. 220 . . . . .</b>	
	IV. 503

## Geometrie.

<b>I. Ueber das vierte Porisma von Fermat. Von Herrn Professor Dr. Ofterdinger und Herrn Rector Dr. Nagel in Ulm . . . . .</b>	
	I. 1
<b>VII. Ueber eine Eigenschaft der Hyperbel. (Mit Bezugnahme auf einen Aufsatz des Herrn Professor Nicola Cavalieri San Bertolo, Com-mend., in den „Atti dell' Accademia Pontificia de' nuovi Lincei.“ Anno XIX. Sess. III<sup>a</sup>. 24 Febr. 1866). Von Herrn C. Thiel, Kandidaten der Mathematik in Greifswald . . . . .</b>	
	I. 45
<b>VIII. Konstruktion der Intensitätslinien eines dreiaxi-gen Ellipsoids mit Benützung einer Kugelscala. Von Herrn Emil Koutny, Assistenten der de-scriptiven Geometrie am K. K. technischen In-stitute in Brünn . . . . .</b>	
	I. 49
<b>X. Auf das Entfernungsorts-Dreieck Bezügliches. Von Herrn Professor Dr. H. Emsmann an der Realschule 1. Ordnung in Stettin . . . . .</b>	
	II. 121
<b>XII. Zur Construction von Dreiecken mit Benutzung</b>	







Von Herrn Gymnasial-Oberlehrer Dr. Meyer in Bunzlau (Schlesien) . . . . .	III.	369
--	------	-----

Geodäsie.

VI. Ueber den mittleren Fehler der Resultate aus trigonometrischen Messungen. Von Herrn Doc- tor Börsch, ord. Lehrer an der höheren Ge- werbeschule in Cassel . . . . .	I.	40
--	----	----

Mechanik.

II. Ueber das Problem der Rotation eines festen Körpers. Von Herrn Professor Dr. Ladislaus Zajaczkowski in Warschau . . . . .	I.	19
XIII. Neue analytische Entwicklung der allgemein- sten Gesetze der Statik. Von dem Heraus- geber . . . . .	{ II. III.	152 241
XIV. Der Mittelpunkt oder das Centrum beliebig vie- ler auf beliebige Weise in einer und derselben Ebene wirkender Kräfte. Von dem Heraus- geber . . . . .	III.	276
XX. Wurfbewegung im widerstehenden Mittel und Construction der Flugbahn. Von Herrn Dr. A. M. Nell, Lehrer an der technischen Schule zu Darmstadt . . . . .	IV.	361

Übungsaufgaben für Schüler.

XVIII. Zwei arithmetische Aufgaben, die erste nach Herrn Tardy, Professor in Genua, mitge- theilt von dem Herausgeber . . . . .	III.	324
XVIII. Drei geometrische Lehrsätze zu beweisen, der dritte nach Herrn Cesare Toscani, Profes- sor in Siena, mitgetheilt von dem Heraus- geber . . . . .	III.	326

Simson an Kürze und Eleganz nichts zu wünschen übrig lassen, so folgt hier doch ein von den genannten abweichender Beweis, der zur nachfolgenden Verallgemeinerung am bequemsten sein möchte.

**Satz I.** Taf. I. Fig. 1. und Fig. 2.

Wenn man an den Durchmesser  $AB$  eines Kreises ein Rechteck  $ABCD$  legt, dessen Höhe  $AD$  gleich ist der Seite  $AE$  eines in den Kreis beschriebenen Quadrats, und aus den Ecken  $C$  und  $D$  desselben nach einem beliebigen Punkt  $P$  des Umfanges dieses Kreises gerade Linien  $CP$  und  $DP$  zieht, welche den Durchmesser  $AB$  in  $M$  und  $N$  schneiden, so ist:

$$AM^2 + BN^2 = AB^2.$$

**Beweis.**

I. Es liege der Punkt  $P$  auf dem gegen  $CD$  concaven Theil des Umkreises. Taf. I. Fig. 1.

Ziehe durch den Mittelpunkt  $H$  und durch den Punkt  $P$  auf  $DC$  die Normalen  $FG$  und  $PR$ , welche letztere die  $AB$  in  $Q$  schneidet, und verbinde  $H$  und  $P$  und ebenso  $G$  und  $P$  durch gerade Linien.

$$\left. \begin{aligned} \text{Nun ist } AM^2 + BM^2 &= 2AH^2 + 2HM^2 \\ AN^2 + BN^2 &= 2AH^2 + 2HN^2 \end{aligned} \right\} \text{Elem. II. 9,}$$

$$\begin{aligned} \text{also } AM^2 + AN^2 + BM^2 + BN^2 &= 4AH^2 + 2HM^2 + 2HN^2 \\ &= AB^2 + 2HM^2 + 2HN^2. \end{aligned}$$

Nun ist  $DG = GC$ , also  $NS = SM$ , also

$$HM^2 + HN^2 = 2NS^2 + 2HS^2, \text{ Elem. II. 10,}$$

also:

$$2HM^2 + 2HN^2 = 4NS^2 + 4HS^2 = MN^2 + 4HS^2,$$

daher:

$$1) \dots AM^2 + AN^2 + BM^2 + BN^2 = AB^2 + MN^2 + 4HS^2.$$

Da  $MN : CD = PQ : PR$ , so ist, da  $BC^2 = AE^2$ ,

also  $2BC^2 = 2AE^2 = AB^2 = CD^2$  ist:

$$\begin{aligned} MN^2 : \left\{ \frac{CD^2}{2BC^2} \right\} &= PQ^2 : PR^2 \\ &= 2PQ^2 : 2PR^2 \text{ Elem. V. 15,} \end{aligned}$$

also:

$$2) \dots MN^2 : BC^2 = 2PQ^2 : PR^2, \text{ Elem. V. 4.}$$

Weil ferner:

$$HS : \left\{ \begin{matrix} GH \\ BC \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} GR \\ HQ \end{matrix} \right\} : PR,$$

so ist:

$$HS^2 : BC^2 = HQ^2 : PR^2,$$

also:

$$3) \dots 4HS^2 : BC^2 = 4HQ^2 : PR^2.$$

Verbindet man nro. 2. und nro. 3., so ist nach Elem. V. 24. u. 4.

$$4) \dots MN^2 + 4HS^2 : 2PQ^2 + 4HQ^2 = BC^2 : PR^2.$$

Endlich ist:

$$NA : DR = \left\{ \begin{matrix} AD \\ BC \end{matrix} \right\} : PR = BM : CR,$$

also:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{matrix} AN^2 \\ BC^2 \end{matrix} \right\} : \left\{ \begin{matrix} DR^2 \\ PR^2 \end{matrix} \right\} &= BM^2 : CR^2 \\ &= AN^2 + BM^2 : DR^2 + CR^2, \text{ Elem. V. 12.} \end{aligned}$$

Nun ist aber:

$$\begin{aligned} DR^2 + CR^2 &= 2DG^2 + 2GR^2, \text{ Elem. II. 9.} \\ &= 2PH^2 + 2HQ^2 \\ &= 2PQ^2 + 4HQ^2, \text{ Elem. I. 47.} \end{aligned}$$

Also hat man:

$$5) \dots BC^2 : PR^2 = AN^2 + BM^2 : 2PQ^2 + 4HQ^2.$$

Verbindet man nro. 5. mit nro. 4., so hat man nach Elem. V. 11. und 9.  $AN^2 + BM^2 = MN^2 + 4HS^2$ , und nach nro. 1.:

$$AM^2 + AN^2 + BM^2 + BN^2 = AB^2 + MN^2 + 4HS^2,$$

also:

$$\begin{aligned} AM^2 + BN^2 &= AB^2, \\ &\text{q. e. d.} \end{aligned}$$

II. Es falle der Punkt  $P$  auf den gegen  $CD$  convexen Theil des Umkreises, Taf. I. Fig. 2., so fällt der Punkt  $M$  in die Verlängerung von  $AB$ .

Ziehe durch den Mittelpunkt  $H$  und durch  $P$  auf  $DC$  die Normalen  $GF$  und  $PQ$ , verbinde  $P$  mit  $H$  und  $G$  mit  $P$  durch gerade Linien, und verlängere letztere, bis sie die verlängerte  $AB$  in  $S$  trifft.

Es ist  $AM^2 + BM^2 = 2AH^2 + 2HM^2$ , Elem. II. 10.

und  $AN^2 + BN^2 = 2AH^2 + 2HN^2$ , Elem. II. 9.

also:

$$\begin{aligned} 1) \dots AM^2 + AN^2 + BM^2 + BN^2 &= 4AH^2 + 2HM^2 + 2HN^2 \\ &= AB^2 + 4NS^2 + 4HS^2 \\ &= AB^2 + MN^2 + 4HS^2. \end{aligned}$$

Nun ist:

$$MN : CD = PQ : PR,$$

also:

$$MN^2 : \left\{ \frac{CD^2}{2BC^2} \right\} = PQ^2 : PR^2 = 2PQ^2 : 2PR^2,$$

daher:

$$2) \dots MN^2 : BC^2 = 2PQ^2 : PR^2.$$

Ferner ist:

$$HS : \left\{ \frac{GH}{BC} \right\} = \left\{ \frac{GR}{HQ} \right\} : PR,$$

also:

$$HS^2 : BC^2 = HQ^2 : PR^2,$$

folglich:

$$3) \dots 4HS^2 : BC^2 = 4HQ^2 : PR^2.$$

Verbindet man nro. 3. mit nro. 5., so hat man nach Elem. V. 24:

$$MN^2 + 4HS^2 : BC^2 = 2PQ^2 + 4HQ^2 : PR^2,$$

also:

$$4) \dots MN^2 + 4HS^2 : 2PQ^2 + 4HQ^2 = BC^2 : PR^2.$$

Endlich ist:

$$AN : DR = \left\{ \frac{AD}{BC} \right\} : PR = BM : CR,$$

also:

$$AN^2 : DR^2 = BM^2 : CR^2.$$



Daher nach Elem. V. 12:

$$\left\{ \begin{matrix} AN^2 \\ BC^2 \end{matrix} \right\} : \left\{ \begin{matrix} DR^2 \\ PQ^2 \end{matrix} \right\} = AN^2 + BM^2 : DR^2 + CR^2.$$

$$\begin{aligned} \text{Da nun } DR^2 + CR^2 &= 2DG^2 + 2GR^2, \text{ Elem. II. 9} \\ &= 2PH^2 + 2QH^2 = 2PQ^2 + 4HQ^2, \end{aligned}$$

so ist:

$$5) \dots BC^2 : PQ^2 = AN^2 + BM^2 : 2PQ^2 + 4HQ^2.$$

Verbindet man nro. 4. mit nro. 5., so ist nach Elem. V. 11. 9:

$$AN^2 + BM^2 = MN^2 + 4HS^2;$$

nach nro. 1. war:

$$AM^2 + AN^2 + BM^2 + BN^2 = AB^2 + MN^2 + 4HS^2,$$

also

$$AM^2 + BN^2 = AB^2,$$

q. e. d.

1. Zusatz. Verlängert man  $DP$ , bis die Peripherie in  $P'$  zum zweiten Mal geschnitten wird, und zieht man  $CP'$ , so ist nach dem ersten Fall:

$$AB^2 = AM'^2 + BN^2,$$

und nach dem zweiten Fall:

$$AB^2 = AM^2 + BN^2;$$

also ist:

$$AM = AM'.$$

Ehenso ist, wenn  $CP$  den Kreis zum zweiten Mal in  $p$  begegnet und  $Dpn$  gezogen wird:

$$AM^2 + Bn^2 = AB^2 = AM^2 + BN^2, \text{ also } Bn = BN.$$

2. Zusatz. Die Linie  $CP'$  schneide die Linie  $Dpn$  in  $q$ . Da  $PC \cdot Cp = CB^2$  (Elem. III. 36.)  $= DC \cdot CG$  (ex const.), so liegen die Punkte  $D, P, p, G$  auf der Peripherie eines Kreises. Und da  $P'D \cdot DP = DA^2$  (Elem. III. 36.)  $= DC \cdot DG$ , so liegen auch die Punkte  $C, P', P, G$  auf der Peripherie eines Kreises. Also ist Winkel  $DGP = CP'D$  und  $P'qD = P'CP + qpC = P'CP + PpD = P'CP + PGD = P'CP + CP'D = DPC$ , und daher  $q$  auf der Peripherie des Kreises um den Durchmesser  $AB$ .

**Satz II.** Taf. I. Fig. 3.**A l l g e m e i n e r S a t z.**

Zieht man in einem Kreis irgend eine Sehne  $AB$ , an ihre Endpunkte zwei gleich lange Tangenten  $AD$  und  $BC$  und zwar so lang, dass sie als Katheten eines gleichschenkligen rechtwinkligen Dreieckes angesehen werden können, dessen Hypotenuse die Verbindungslinie  $DC$  sei (so dass also  $AD^2 + BC^2 = DC^2 = 2BC^2 = 2AD^2$ , oder, wenn  $DC$  in  $G$  halbt wird,  $BC^2 = AD^2 = DC \cdot GC$  werde); so wird, wenn man von den Punkten  $D$  und  $C$  an irgend einen Punkt  $P$  der Peripherie gerade Linien zieht, die Sehne  $AB$  in den Punkten  $M$  und  $N$  so geschnitten, dass man hat:

$$AB^2 = AM^2 + BN^2.$$

**B e w e i s.**

Man ziehe durch  $P$  die  $LK$  parallel  $AB$ , verbinde  $G$  und  $P$  durch  $GP$ , welche die  $AB$  in  $S$  treffe, errichte in  $G$  die Normale  $GF$ , welche die Peripherie in  $E$  und  $F$ , die  $AB$  in  $H$  und die  $LK$  in  $R$  schneide, alsdann hat man:

$$\left. \begin{aligned} AM^2 + BM^2 &= 2AH^2 + 2MH^2 \\ AN^2 + BN^2 &= 2AH^2 + 2NH^2 \end{aligned} \right\} \text{Elem. II. 9, 10;}$$

$$\begin{aligned} \text{also 1) } \dots AM^2 + AN^2 + BM^2 + BN^2 &= 4AH^2 + 2MH^2 + 2NH^2 \\ &= AB^2 + 2MH^2 + 2NH^2 \\ &= AB^2 + 4NS^2 + 4HS^2 \\ &\quad (\text{Elem. II. 10}), \text{ und weil } DG = GC, \\ &\quad \text{also } NS = SM: \\ &= AB^2 + MN^2 + 4HS^2. \end{aligned}$$

Da:

$$\begin{aligned} MN:CD &= PM:CP \\ &= BK:CK, \end{aligned}$$

so ist:

$$\begin{aligned} MN^2: \left\{ \begin{array}{l} CD^2 \\ 2BC^2 \end{array} \right\} &= BK^2:CK^2 \\ &= 2BK^2:2CK^2, \text{ Elem. V. 15,} \end{aligned}$$

also:

$$2) \dots MN^2:BC^2 = BK^2:CK^2, \text{ Elem. V. 4.}$$

Und da:

$$\begin{aligned} HS:PR &= GH:GR \\ &= BC:CK, \end{aligned}$$

so ist:

$$HS : BC = PR : CK,$$

also:

$$HS^2 : BC^2 = PR^2 : CK^2,$$

oder:

$$3) \dots \dots \dots 4HS^2 : BC^2 = 4PR^2 : CK^2.$$

Aus nro. 2. und nro. 3. folgt nach Elem. V. 24.:

$$MN^2 + 4HS^2 : BC^2 = 2BK^2 + 4PR^2 : CK^2,$$

also ist:

$$4) \dots \dots MN^2 + 4HS^2 : 2BK^2 + 4PR^2 = BC^2 : CK^2.$$

Endlich ist:

$$\begin{aligned} AN : LP &= AD : DL \\ &= BC : CK \\ &= BM : PK, \end{aligned}$$

also:

$$\begin{aligned} AN^2 : LP^2 &= BM^2 : PK^2 \\ &= AN^2 + BM^2 : LP^2 + PK^2, \text{ Elem. V. 17,} \end{aligned}$$

oder:

$$5) \dots \dots BC^2 : CK^2 = AN^2 + BM^2 : LP^2 + PK^2.$$

Verbindet man nro. 5. mit nro. 4., so ist:

$$MN^2 + 4HS^2 : 2BK^2 + 4PR^2 = AN^2 + BM^2 : LP^2 + PK^2.$$

Es ist aber:

$$\begin{aligned} 2BK^2 + 4PR^2 &= 2LP.PK + 4PR^2, \text{ Elem. III. 36.} \\ &= 2LP.PK + 2PR^2 + 2PR^2 \\ &= 2PK^2 + 2PR^2, \text{ Elem. II. 5.} \\ &= LP^2 + PK^2, \text{ Elem. II. 9.,} \end{aligned}$$

folglich:

$$MN^2 + 4HS^2 = AN^2 + BM^2, \text{ Elem. V. 9.,}$$

mithin nach nro. 1:

$$\begin{aligned} AM^2 + BN^2 &= AB^2. \\ &\text{q. e. d.} \end{aligned}$$

**Satz III.** Taf. I. Fig. 4.

**O r t s - S a t z.**

Es sei *amb* irgend eine Curve, welche von der ge-

raden Linie  $DE$  geschnitten, die in  $F$  halbart werde (also  $DF = FE$ ); es sei ferner in  $F$  die Normale  $FC$  und durch  $C$  die gerade Linie  $GH$  parallel mit  $DE$  gezogen, dann auf  $GH$  zwei Punkte  $A$  und  $B$  gleichweit von  $C$  angenommen, also  $AC = CB$ , und von  $A$  und  $B$  an irgend einen Punkt  $M$  der Curve gerade Linien gezogen, welche die  $DE$  in  $E$  und  $S$  schneiden, so ist, wenn

$$ET^2 + DS^2 = 2k^2,$$

wo  $k$  eine Constante bezeichnet, die Curve ein **Kegelschnitt**.

### B e w e i s .

Man vollende das Rechteck  $DEGH$ , ziehe  $Tt$  und  $Ss$  parallel mit  $DG$ , setze  $AC = CB = \alpha$ ,  $DF = FE = \beta$ ,  $CF = \gamma$ ; ziehe ferner  $MP$  senkrecht auf  $GH$ , welche die  $DE$  in  $Q$  schneidet; ziehe  $AQ$ , welche die verlängerte  $CF$  in  $O$  trifft, setze endlich  $CP = x$  und  $PM = y$ .

Da

$$PM : AP = \left\{ \begin{matrix} Tt \\ PQ \end{matrix} \right\} : At$$

oder:

$$y : \alpha - x = \gamma : At,$$

so ist:

$$At = \frac{\gamma(\alpha - x)}{y};$$

und da

$$PM : PB = Ss : Bs,$$

oder:

$$y : \alpha + x = \gamma : Bs,$$

so ist:

$$Bs = \frac{\gamma(\alpha + x)}{y}.$$

Daher:

$$ET = Ht = HA - At = \alpha + \beta - \frac{\gamma(\alpha - x)}{y},$$

$$DS = Gs = GB - Bs = \alpha + \beta - \frac{\gamma(\alpha + x)}{y};$$

also:

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{ET^2 + DS^2}{2k^2} \right\} &= (\alpha + \beta)^2 - \frac{2\gamma(\alpha + \beta)(\alpha - x)}{y} + \frac{\gamma^2(\alpha - x)^2}{y^2} \\ &\quad + (\alpha + \beta)^2 - \frac{2\gamma(\alpha + \beta)(\alpha + x)}{y} + \frac{\gamma^2(\alpha + x)^2}{y^2}, \\ &= 2(\alpha + \beta)^2 - \frac{4\alpha(\alpha + \beta)\gamma}{y} + \frac{2\gamma^2(\alpha^2 + x^2)}{y^2}, \end{aligned}$$

also :

$$k^2 = (\alpha + \beta)^2 - \frac{2\alpha(\alpha + \beta)\gamma}{y} + \frac{\gamma^2(\alpha^2 + x^2)}{y^2},$$

daher :

$$k^2 y^2 = (\alpha + \beta)^2 y^2 - 2\alpha(\alpha + \beta)\gamma y + \gamma^2(\alpha^2 + x^2),$$

also :

$$0 = \{(\alpha + \beta)^2 - k^2\} y^2 - 2\alpha(\alpha + \beta)\gamma y + \gamma^2(\alpha^2 + x^2),$$

eine Gleichung für einen Kegelschnitt.

Wäre :

$$(\alpha + \beta)^2 - k^2 = \gamma^2,$$

so wäre :

$$0 = y^2 - \frac{2\alpha(\alpha + \beta)}{\gamma} y + \alpha^2 + x^2,$$

daher :

$$\frac{\alpha^2(\alpha + \beta)^2}{\gamma^2} - \alpha^2 = \left\{ y - \frac{\alpha(\alpha + \beta)}{\gamma} \right\}^2 + x^2,$$

eine Gleichung für einen Kreis.

Da hiernach, wenn  $O$  dieses Kreises Mittelpunkt ist,

$$CO = \frac{\alpha(\alpha + \beta)}{\gamma}$$

und

$$CF = \gamma = \frac{\gamma^2}{\gamma},$$

so ist :

$$OF = \frac{\alpha(\alpha + \beta) - \gamma^2}{\gamma};$$

ferner ist dieses Kreises Halbmesser

$$= \sqrt{\frac{\alpha^2(\alpha + \beta)^2}{\gamma^2} - \alpha^2},$$

folglich :

$$\begin{aligned}
 Fa^2 &= \frac{\alpha^2(\alpha + \beta)^2}{\gamma^2} - \alpha^2 - OF^2 \\
 &= \frac{\alpha^2(\alpha + \beta)^2}{\gamma^2} - \alpha^2 - \frac{\alpha^2(\alpha + \beta)^2}{\gamma^2} + 2\alpha(\alpha + \beta) - \gamma^2 \\
 &= \alpha^2 + 2\alpha\beta - \gamma^2 = (\alpha + \beta)^2 - \beta^2 - \gamma^2 = k^2 - \beta^2,
 \end{aligned}$$

weil

$$(\alpha + \beta)^2 - k^2 = \gamma^2 \text{ (ex hyp.)}$$

also:

$$4Fa^2 = ab^2 = 4k^2 - 4\beta^2.$$

Soll nun  $ab^2 = 2k^2$  sein, so muss sein:

$$2k^2 = 4k^2 - 4\beta^2,$$

also:

$$2\beta^2 = k^2.$$

Fällt der Punkt  $M$  mit  $a$  zusammen, so muss sein:

$$Ea^2 + Da^2 = 2k^2,$$

also:

$$2DF^2 + 2Fa^2 = 2k^2,$$

$$DF^2 + Fa^2 = k^2,$$

$$Fa^2 = k^2 - \beta^2,$$

wie oben.

Wenn  $(\alpha + \beta)^2 = k^2$ , so folgt aus der allgemeinen Gleichung:

$$0 = -2\alpha(\alpha + \beta)\gamma y + \alpha^2\gamma^2 + \gamma^2x^2,$$

$$y = \frac{\gamma^2(\alpha^2 + x^2)}{2\alpha(\alpha + \beta)\gamma} = \frac{\gamma(\alpha^2 + x^2)}{2\alpha(\alpha + \beta)},$$

oder:

$$\frac{2\alpha(\alpha + \beta)}{\gamma}y = \alpha^2 + x^2,$$

$$\frac{2\alpha(\alpha + \beta)}{\gamma}y - \alpha^2 = x^2,$$

$$\frac{2\alpha(\alpha + \beta)}{\gamma} \left\{ y - \frac{\alpha\gamma}{2(\alpha + \beta)} \right\} = x^2,$$

eine Gleichung für eine Parabel, deren Axe  $CO$  ist, und deren Scheitel von  $C$  absteht um

$$\frac{\alpha\gamma}{2(\alpha + \beta)}.$$

Wenn  $(\alpha + \beta)^2 - k^2$  nicht  $= 0$  ist, so hat man:









*LMNO* construirt, bei welchem wieder  $LO^2 = MN^2 = \frac{1}{2}LM^2$  ist, oder (was einerlei ist) welches dem Rechtecke *BCDE* ähnlich ist, so ergibt sich leicht, dass *AE* verlängert durch *O*, und *AD* durch *N* gehen muss. Denn es ist  $AB:AL = BC:LM$ , also  $= \sqrt{2}BE^2 : \sqrt{2}LO^2 = BE\sqrt{2} : LO\sqrt{2} = BE:LO$ , und daher, weil  $BE \parallel LO$  ist, so ist  $\triangle ABE \sim \triangle ALO$ , also  $LAE = LAO$ ; folglich fallen *AE* und *AO* auf einander.

Zusatz 6. Es ist daher auch  $LD^2 + ME^2 = LM^2$ ;  $OD^2 + NE^2 = 2LB^2 = 2(LM^2 + ME^2)$  u. s. w.

§. 6. **5. Allgemeinerer Lehrsatz** (von dem die Lehrsätze 2. §. 3. u. 4. §. 5. besondere Fälle sind). (Taf. II. Fig. 8.)

Wenn man auf der Hypotenuse *BC* eines rechtwinkligen Dreiecks *ABC* ein Rechteck *BCDE* beschreibt, dessen andere Seite  $BE = nBC$  ist und die Spitze des rechten Winkels *A* mit den Ecken *E* und *D* des Rechtecks *BCDE* verbindet, so wird die Hypotenuse *BC* dadurch in *F* und *G* so geschnitten, dass  $BG^2 + CF^2 = BC^2 + (1 - 2n^2)FG^2$  ist.

#### B e w e i s.

Construirt man wieder das Rechteck *FGHK*, so ist  $FGHK \sim BCDE$  (§. 1.), also  $FK = GH = nFG$ . Zieht man *BH* und *CK*, so ist:

$$\begin{aligned} BG^2 &= BH^2 - GH^2 = AB^2 + AH^2 - GH^2 \\ CF^2 &= CK^2 - FK^2 = AC^2 + AK^2 - FK^2 \\ \hline BG^2 + CF^2 &= AB^2 + AC^2 + AH^2 + AK^2 - 2FK^2 \\ &= BC^2 + FG^2 - 2n^2 \cdot FG^2 \\ &= BC^2 + (1 - 2n^2)FG^2. \end{aligned}$$

Zusatz 1. Zieht man wieder *EG* und *DF*, so ist:

$$\begin{aligned} EG^2 &= BG^2 + BE^2 = BG^2 + n^2 \cdot BC^2 \\ DF^2 &= CF^2 + CD^2 = CF^2 + n^2 \cdot BC^2 \\ \hline EG^2 + DF^2 &= BG^2 + CF^2 + 2n^2 \cdot BC^2 = BC^2 + 2n^2 \cdot BC^2 + (1 - 2n^2)FG^2 \\ &= (1 + 2n^2)BC^2 + (1 - 2n^2)FG^2. \end{aligned}$$

Zusatz 2. Ist  $n = 1$ , d. h. gelten die Voraussetzungen von §. 2., so ist  $BG^2 + CF^2 = BC^2 + (1 - 2)FG^2 = BC^2 - FG^2$  (wie §. 3.) und  $EG^2 + DF^2 = 3BC^2 - FG^2$ .

Zusatz 3. Ist  $n = \sqrt{\frac{1}{2}}$ , d. h. gelten die Voraussetzungen von §. 4., so ist  $BG^2 + CF^2 = BC^2 + (1 - 2 \cdot \frac{1}{2})FG^2 = BC^2$ , und  $EG^2 + DF^2 = 2BC^2$  (wie §. 5. und §. 6. Zus. 1.).









der ein Rechteck, so erhält man Lehrsatz 4. §. 5. als besonderen Fall von Lehrsatz 7. Zusatz 3.

**Zusatz 5.** Beschreibt man einen Kreis, von welchem  $AB$  Chorde und  $AE$ , also auch  $BD$ , Tangente ist, so geht dieser Kreis durch die Spitze  $C$  des Dreiecks  $ABC$ , und das Trapez  $ABDE$  gehört auch zu jedem anderen über  $AB$  als Grundlinie beschriebenen Dreiecke, dessen Spitze auf der Peripherie des Kreisabschnittes  $ACB$  liegt, da der Winkel dieses Kreisabschnitts konstant  $= ACB$ , also auch  $= BAE$  ist. Dadurch geht der voranstehende Zusatz 4. in Satz I. und Zusatz 3. in Satz II. von Herrn Professor Osterdinger über, welche also beide besondere Fälle des 7. Lehrsatzes sind. Ebenso liessen sich durch Zusatz 1. u. 2. zwei analoge Porismata wie Satz I. und II. ableiten für den Fall, dass  $m = n$ , oder dass  $AE = BD = CD$  wird.

**Zusatz 6.** (Taf. II. Fig. 11.). Verlängert man  $CA$  und  $CB$ , bis sie die Verlängerungen von  $DE$  in  $L$  und  $M$  schneiden, so ergibt sich leicht, dass  $\triangle AEL \sim \triangle HFA$  und  $\triangle BDM \sim \triangle CGB$  ist; mithin ist auch  $\triangle AEL \sim \triangle BDM$ , und daher  $LE:BD = AE:DM$ , oder, weil  $AE = BD$  ist,  $LE:AE:DM$ . Daher ist  $AE$  mittlere Proportionale zwischen  $LE$  und  $DM$ , also  $AE^2 = LE \cdot DM$ . Aber  $AE^2 = \frac{m^2}{n^2} ED^2$ ; folglich ist auch hier  $LE \cdot DM = \frac{m^2}{n^2} ED^2$ , woraus sich wieder für die besonderen Fälle, dass  $m:n = 1:1$ , oder  $m:n = 1:\sqrt{2}$ , und ebenso dass  $ACB = 90^\circ$  ist, besondere Sätze ergeben.

**Zusatz 7.** Auch ergibt sich auf gleiche Weise wie in §. 6. Zusatz 5, dass, wenn man auf  $LM$  ein gleichseitiges Trapez konstruirt, welches dem Trapeze  $ABDE$  und dem Trapeze  $HKGF$  ähnlich ist, die Verlängerungen von  $CE$  und  $CD$  durch die Winkelspitzen dieses Trapezes gehen müssen, und so fort in infinitum.

### S c h l u s s b e m e r k u n g.

Es ist einleuchtend, dass die bisherigen Sätze sämmtlich auch in der Form von geometrischen Oertern ausgesprochen werden können, z. B.: „Wenn in einem gleichseitigen Trapeze die eine der parallelen Seiten gleich jeder der nicht-parallelen ist, so ist ein über der zweiten parallelen Seite so beschriebener Kreisabschnitt, dass jede nicht-parallele Seite Tangente an denselben ist, der geometrische Ort für die Spitzen aller über der ersten Parallelen beschriebenen Dreiecke, deren Seiten die zweite Parallele in drei stetig proportionirte Stücke theilen.“

## II.

### Ueber das Problem der Rotation eines festen K6rpers.

Von

Herrn Professor Dr. Ladislaus Zajęzkowski

in Warschau.

Herr Richelot gibt in seiner Abhandlung 6ber das Problem der Rotation eines festen K6rpers die bekannten St6rungsgleichungen in der Form, wie sie von Jacobi im 5ten Bande der Comptes rendus aufgestellt worden sind und erwähnt, dass der Beweis theils in der Abhandlung Jacobi's (Crelle, Band XVII.) begründet ist, theils auf dieselbe Weise ausgef6hrt werden kann, deren sich Desboves (Liouville, Band XIII.) in einem specielleren Fall bedient. Der allgemeine Beweis, dessen ich mich bei meinen Vorlesungen 6ber analytische Mechanik an der hiesigen Hochschule bediene, d6rfte wegen seiner Klarheit und, fast m6chte ich sagen, wegen seiner elementaren Darstellung, wohl werth sein, beim Unterrichte in der analytischen Mechanik ber6cksichtigt zu werden.

1. Sei mir erlaubt zuerst eine rapide Darstellung einiger bekannten Formeln vor auszuschicken. Sind

$$1) \dots \dots \dots F_k = 0 \quad [k = 1, 2, \dots, p]$$

$p$  Bedingungsgleichungen, denen die Coordinaten eines Systems von  $n$  materiellen Punkten unterworfen sind, sind ferner  $x_r, y_r, z_r$  die Coordinaten desjenigen Systempunktes, dessen Masse  $m_r$

ist, sind endlich  $X_r$ ,  $Y_r$ ,  $Z_r$  die nach den Coordinatenachsen genommenen Componenten der auf  $m_r$  wirkenden Kraft, so lassen sich im Falle der Kräftefunction, wo also

$$X_r = \frac{\partial U}{\partial x_r}, \quad Y_r = \frac{\partial U}{\partial y_r}, \quad Z_r = \frac{\partial U}{\partial z_r}$$

ist, die Bewegungsgleichungen des Systems so darstellen:

$$2) \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} m_r \frac{d^2 x_r}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x_r} + \sum_{k=1}^p \lambda_k \frac{\partial F_k}{\partial x_r}, \\ m_r \frac{d^2 y_r}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y_r} + \sum_{k=1}^p \lambda_k \frac{\partial F_k}{\partial y_r}, \\ m_r \frac{d^2 z_r}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z_r} + \sum_{k=1}^p \lambda_k \frac{\partial F_k}{\partial z_r}. \end{array} \right. \quad [r = 1, 2, \dots, n]$$

Bekanntlich lassen sich in Folge der  $p$  Bedingungsgleichungen 1) die  $3n$  Coordinaten durch  $3n - p = m$  andere Variable  $q_s$  [ $s = 1, 2, \dots, m$ ] ausdrücken. Führt man letztere ein, so lassen sich die Bewegungsgleichungen 2) nach Lagrange in die Form bringen:

$$3) \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial q_s'} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_s} - \frac{\partial U}{\partial q_s} = 0, \\ \frac{dq_s}{dt} = q_s'; \end{array} \right. \quad [s = 1, 2, \dots, m]$$

wo  $T$  die Summe der lebendigen Kräfte des Systems in den neuen Variablen  $q_s$ ,  $q_s'$  ausgedrückt bezeichnet.

Setzt man endlich

$$4) \dots \dots \dots \frac{\partial T}{\partial q_s'} = p_s,$$

bestimmt aus diesen  $m$  Gleichungen die  $q_s'$  durch  $p_s$ , substituirt die erhaltenen Werthe in obige Gleichungen 3), so werden selbe, falls 1) die Zeit  $t$  nicht explicite enthält, in die Form gebracht:

$$5) \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} \frac{dq_s}{dt} = \frac{\partial(T-U)}{\partial p_s}, \\ \frac{dp_s}{dt} = -\frac{\partial(T-U)}{\partial q_s}; \end{array} \right. \quad [s = 1, 2, \dots, m]$$

wo  $U$  den Werth bezeichnet, welchen die Summe der lebendigen

Kräfte nach vollzogener Substitution der Werthe für  $q_s'$  aus 4) annimmt.

Denkt man sich nun die  $p_s$  als partielle Differentialquotienten  $l$ ter Ordnung einer Function  $q$  der Variabeln  $q_s$  nach  $q_s$  genommen, setzt also allgemein

$$p_s = \frac{\partial q}{\partial q_s},$$

so wird nach dem Hamilton-Jacobi'schen Satze die vollständige Lösung (solution complète) der partiellen Differentialgleichung  $l$ ter Ordnung

$$6) \dots\dots\dots T - U + \alpha_m = 0,$$

wo  $\alpha_m$  eine willkürliche Constante ist, nämlich

$$q = f,$$

wo die Function  $f$  die Variabeln  $q_s$  (ohne  $t$ ) und  $m-1$  willkürliche Constanten  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m-1}$ , von denen keine bloss addirt ist, enthält, die Eigenschaft besitzen, dass das System

7)

$$\frac{\partial f}{\partial q_1} = p_1, \quad \frac{\partial f}{\partial q_2} = p_2, \quad \dots, \quad \frac{\partial f}{\partial q_m} = p_m;$$

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \quad \frac{\partial f}{\partial \alpha_2} = \beta_2, \quad \dots, \quad \frac{\partial f}{\partial \alpha_{m-1}} = \beta_{m-1}; \quad \frac{\partial f}{\partial \alpha_m} + t = \beta_m;$$

wo  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$  weitere  $m$  willkürliche Constanten sind, die Integralgleichungen der Bewegungsgleichungen 5) darstellen wird.

Ist nun  $\Omega$  eine zur Kräftefunction hinzutretende, die sogenannte Störungsfunction, so werden die Differentialgleichungen des gestörten Problems sein:

$$8) \dots\dots\dots \left\{ \begin{array}{l} \frac{dq_s}{dt} = \frac{\partial(T - U - \Omega)}{\partial p_s}, \\ \frac{dp_s}{dt} = \frac{\partial(U + \Omega - T)}{\partial q_s}. \end{array} \right. \quad [s = 1, 2, \dots, m]$$

Lagrange (Mécanique analytique III. edit. tome I<sup>r</sup>. p. 310) hat gezeigt, dass, wenn man die Anfangswerthe der Variabeln  $q_s, p_s$ , die ich respective durch  $a_s, b_s$  bezeichne, als die zu variirenden Constanten einführt, die Gleichungen 8) umgeformt werden in:

$$9) \dots\dots\dots \left\{ \begin{array}{l} \frac{da_s}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial b_s}, \\ \frac{db_s}{dt} = -\frac{\partial \Omega}{\partial a_s}; \end{array} \right. \quad [s = 1, 2, \dots, m]$$

aus denen diejenigen Zeitfunctionen  $a_s$ ,  $b_s$  zu bestimmen sind, welche, für  $a_s$ ,  $b_s$  in die Lösung 7) des ungestörten Problems 5) substituirt, jene Lösung in die Lösung des gestörten Problems 8) umwandeln.

Es ist aber ein Uebelstand, dass die Integration der Gleichungen 5) nicht die Constanten  $a_s$ ,  $b_s$  eingeführt hat; daher wäre es wünschenswerth, ebenso einfache Gleichungen, wie jene 9), aufstellen zu können, aus denen unmittelbar die Zeitfunctionen für die Integrationsconstanten  $\alpha_s$ ,  $\beta_s$  berechnet werden könnten. Jacobi hat dieses Problem gelöst, indem er am angegebenen Orte gezeigt hat, dass, wenn man in den Gleichungen 8) des gestörten Problems für die Variabeln  $q_s$ ,  $p_s$  die Constanten  $\alpha_s$ ,  $\beta_s$  einführt, jene Gleichungen in andere von derselben Form wie die 9), nämlich in

$$10) \dots\dots\dots \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\alpha_s}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial \beta_s}, \\ \frac{d\beta_s}{dt} = -\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha_s} \end{array} \right. \quad [s=1, 2, \dots, m]$$

übergeben. Den Beweis dieses wichtigen Satzes hat Desboves (wie gesagt) in einem speciellen Falle geliefert, der allgemeine Beweis wäre etwa folgender.

2. Setzt man in 7)  $t = 0$ , und ersetzt gleichzeitig die Variabeln  $q_s$ ,  $p_s$  durch ihre respectiven Anfangswerthe  $a_s$ ,  $b_s$ , so erhält man den Zusammenhang zwischen den Constanten  $a_s$ ,  $b_s$  und jenen  $\alpha_s$ ,  $\beta_s$  in der Form:

$$11) \dots\dots\dots \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial a_s} = b_s, \\ \frac{\partial f}{\partial \alpha_s} = \beta_s. \end{array} \right. \quad [s=1, 2, \dots, m]$$

Aus diesen Gleichungen kann man die Constanten  $a_s$ ,  $b_s$  durch  $\alpha_s$ ,  $\beta_s$  und umgekehrt die Constanten  $\alpha_s$ ,  $\beta_s$  durch  $a_s$ ,  $b_s$  ausdrücken.

Denkt man sich die  $a_s$ ,  $b_s$  durch  $\alpha_s$ ,  $\beta_s$  ausgedrückt und in  $\Omega$ , wie sie in 9) vorkommt, hinein substituirt, so wird  $\Omega$  als eine Function der  $\alpha_s$ ,  $\beta_s$  allein zu betrachten sein. Ihre Differentiation nach  $\alpha_s$ ,  $\beta_s$  gibt:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha_s} = \sum_{v=1}^{v=m} \left[ \frac{\partial \Omega}{\partial a_v} \frac{\partial a_v}{\partial \alpha_s} + \frac{\partial \Omega}{\partial b_v} \frac{\partial b_v}{\partial \alpha_s} \right],$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \beta_s} = \sum_{v=1}^{v=m} \left[ \frac{\partial \Omega}{\partial a_v} \frac{\partial a_v}{\partial \beta_s} + \frac{\partial \Omega}{\partial b_v} \frac{\partial b_v}{\partial \beta_s} \right];$$

der nach 9):

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha_s} = \sum_{v=1}^{v=m} \left[ \frac{da_v}{dt} \frac{\partial b_v}{\partial \alpha_s} - \frac{db_v}{dt} \frac{\partial a_v}{\partial \alpha_s} \right],$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \beta_s} = \sum_{v=1}^{v=m} \left[ \frac{da_v}{dt} \frac{\partial b_v}{\partial \beta_s} - \frac{db_v}{dt} \frac{\partial a_v}{\partial \beta_s} \right].$$

es ist:

$$\frac{da_v}{dt} = \sum_{u=1}^{u=m} \left[ \frac{\partial a_v}{\partial \alpha_u} \frac{d\alpha_u}{dt} + \frac{\partial a_v}{\partial \beta_u} \frac{d\beta_u}{dt} \right],$$

$$\frac{db_v}{dt} = \sum_{u=1}^{u=m} \left[ \frac{\partial b_v}{\partial \alpha_u} \frac{d\alpha_u}{dt} + \frac{\partial b_v}{\partial \beta_u} \frac{d\beta_u}{dt} \right].$$

setzt man daher diese Werthe in obige Ausdrücke und führt folgende Bezeichnungen ein:

$$\left. \begin{aligned} & \sum_{v=1}^{v=m} \left[ \frac{\partial a_v}{\partial \alpha_u} \frac{\partial b_v}{\partial \alpha_s} - \frac{\partial a_v}{\partial \alpha_s} \frac{\partial b_v}{\partial \alpha_u} \right] = [\alpha_u, \alpha_s], \\ & \sum_{v=1}^{v=m} \left[ \frac{\partial a_v}{\partial \beta_u} \frac{\partial b_v}{\partial \alpha_s} - \frac{\partial a_v}{\partial \alpha_s} \frac{\partial b_v}{\partial \beta_u} \right] = [\beta_u, \alpha_s], \\ & \sum_{v=1}^{v=m} \left[ \frac{\partial a_v}{\partial \alpha_u} \frac{\partial b_v}{\partial \beta_s} - \frac{\partial a_v}{\partial \beta_s} \frac{\partial b_v}{\partial \alpha_u} \right] = [\alpha_u, \beta_s], \\ & \sum_{v=1}^{v=m} \left[ \frac{\partial a_v}{\partial \beta_u} \frac{\partial b_v}{\partial \beta_s} - \frac{\partial a_v}{\partial \beta_s} \frac{\partial b_v}{\partial \beta_u} \right] = [\beta_u, \beta_s]; \end{aligned} \right\} \dots \dots$$

erhält man die bekannten Formeln:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial \Omega}{\partial \alpha_s} = \sum_{u=1}^{u=m} [\alpha_u, \alpha_s] \frac{d\alpha_u}{dt} + \sum_{u=1}^{u=m} [\beta_u, \alpha_s] \frac{d\beta_u}{dt}, \\ & \frac{\partial \Omega}{\partial \beta_s} = \sum_{u=1}^{u=m} [\alpha_u, \beta_s] \frac{d\alpha_u}{dt} + \sum_{u=1}^{u=m} [\beta_u, \beta_s] \frac{d\beta_u}{dt}. \end{aligned} \right\} [s=1, 2, \dots, m]$$

Es ist nun leicht zu zeigen, dass die Coefficienten

$$[\alpha_u, \alpha_s], [\beta_u, \beta_s]$$

jede Combination der Indices  $u, s$  aus der Reihe  $1, 2, \dots, m$  Null, und die beiden anderen Coefficienten

$$[\beta_u, \alpha_s], [\alpha_u, \beta_s]$$

dann von Null verschieden sind, wenn die Indices  $u, s$  einander gleich sind, und zwar wird in dem besonderen Falle  $u = s$

$$[\alpha_s, \beta_s] = -[\beta_s, \alpha_s] = +1$$

Der Beweis ist mit Hilfe der Gleichungen 11) leicht zu führen.

Differentiirt man die Function  $f$ , wie sie in 11) vorkommt, total nach  $\alpha_s$  und bedenkt, dass  $f$  die Grösse  $\alpha_s$  nicht nur explicite, sondern auch implicite enthält, insofern nämlich die in ihr enthaltenen Grössen  $a_v$  von  $\alpha_s$  nach 11) abhängen, so wird

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha_s} = \left( \frac{\partial f}{\partial \alpha_s} \right) + \sum_{v=1}^{v=m} \frac{\partial f}{\partial a_v} \frac{\partial a_v}{\partial \alpha_s},$$

oder, da nach 11) der nach dem expliciten  $\alpha_s$  genommene Differentialquotient

$$\left( \frac{\partial f}{\partial \alpha_s} \right) = \beta_s,$$

und überdiess

$$\frac{\partial f}{\partial a_v} = b_v$$

ist,

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha_s} = \beta_s + \sum_{v=1}^{v=m} b_v \frac{\partial a_v}{\partial \alpha_s}.$$

Ebenso findet man

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha_u} = \beta_u + \sum_{v=1}^{v=m} b_v \frac{\partial a_v}{\partial \alpha_u}.$$

Differentiirt man die beiden letzten Gleichungen nochmals, und zwar die erste nach  $\alpha_u$ , die letzte nach  $\alpha_s$ , und zieht hernach die erste von der letzten ab, so findet man nach 12)

$$[\alpha_u, \alpha_s] = 0,$$

indem

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha_s \partial \alpha_u} = \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha_u \partial \alpha_s}, \quad \frac{\partial^2 a_v}{\partial \alpha_s \partial \alpha_u} = \frac{\partial^2 a_v}{\partial \alpha_u \partial \alpha_s}$$

ist.

Geht man von den Differentialquotienten  $\frac{\partial f}{\partial \beta_s}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial \beta_u}$  aus, und differentiirt man selbe nochmals respective nach  $\beta_u$ ,  $\beta_s$ , so findet man ebenso:

$$[\beta_u, \beta_s] = 0.$$

Auf dieselbe Weise wird der Satz für die beiden anderen Coefficienten bewiesen.

Hiermit gehen die Gleichungen 13) über in:



$$14) \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\alpha_s}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial \beta_s}, \\ \frac{d\beta_s}{dt} = -\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha_s}; \end{array} \right. \quad [s=1, 2, \dots, m]$$

welches die Jacobi'schen Gleichungen sind.

### III.

#### Integration der Differentialgleichung

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} + \lambda \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} = \kappa \left( x \frac{dy}{dx} + \mu y \right), \quad (1)$$

in welcher  $\lambda$ ,  $\kappa$  und  $\mu$  constante Zahlen bezeichnen.

Von

Herrn Simon Spitzer,

Professor am Polytechnikum in Wien.

Das Integrale der Gleichung (1) ist, nach der Laplace'schen Methode bestimmt, folgendes:

(2)

$$\begin{aligned} y = & C_1 \int_0^{u_1} e^{\kappa x} u^{\mu-1} (u^{n-1} - \kappa)^{\frac{\lambda-\mu}{n-1}-1} du \\ & + C_2 \int_0^{u_2} e^{\kappa x} u^{\mu-1} (u^{n-1} - \kappa)^{\frac{\lambda-\mu}{n-1}-1} du + \dots \\ & \dots + C_{n-1} \int_0^{u_{n-1}} e^{\kappa x} u^{\mu-1} (u^{n-1} - \kappa)^{\frac{\lambda-\mu}{n-1}-1} du, \end{aligned}$$

vorausgesetzt, dass

$$u_1, u_2, \dots, u_{n-1}$$

die  $n-1$  Wurzeln der Gleichung

$$u^{n-1} - u = 0 \quad (3)$$

bedeuten,  $\mu$  und  $\frac{\lambda-\mu}{n-1}$  positive Zahlen sind, und

$$C_1, C_2, \dots, C_{n-1}$$

willkürliche Constanten repräsentiren. Man kann  $y$  auch so darstellen:

$$y = \int_0^1 u^{\mu-1} (1-u^{n-1})^{\frac{\lambda-\mu}{n-1}-1} [C_1 e^{u_1 u x} + C_2 e^{u_2 u x} + \dots + C_{n-1} e^{u_{n-1} u x}] du,$$

um sich, wenn man will, durch directe Substitution von der Richtigkeit dieses Integrales zu überzeugen.

In dem speciellen Falle, wo  $\mu$  und  $\frac{\lambda-\mu}{n-1}$  ganze positive Zahlen sind, lässt sich die Integration leicht wirklich durchführen; denn man erhält, wenn man von folgender bekannten Formel Gebrauch macht:

$$4) \quad \int e^{ux} \varphi(u) du = e^{ux} \left[ \frac{\varphi(u)}{x} - \frac{\varphi'(u)}{x^2} + \frac{\varphi''(u)}{x^3} - \dots \right],$$

für den in (2) stehenden Werth von  $y$  nachstehenden Ausdruck:

$$\begin{aligned} 5) \quad y = & C_1 e^{u_1 x} \left[ \frac{\varphi(u_1)}{x} - \frac{\varphi'(u_1)}{x^2} + \frac{\varphi''(u_1)}{x^3} - \dots \right] \\ & + C_2 e^{u_2 x} \left[ \frac{\varphi(u_2)}{x} - \frac{\varphi'(u_2)}{x^2} + \frac{\varphi''(u_2)}{x^3} - \dots \right] \\ & + \dots \dots \dots \\ & + C_{n-1} e^{u_{n-1} x} \left[ \frac{\varphi(u_{n-1})}{x} - \frac{\varphi'(u_{n-1})}{x^2} + \frac{\varphi''(u_{n-1})}{x^3} - \dots \right] \\ & + C_n \left[ \frac{\varphi(0)}{x} - \frac{\varphi'(0)}{x^2} + \frac{\varphi''(0)}{x^3} - \dots \right], \end{aligned}$$

$$x \frac{d^n y}{dx^n} + \lambda \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} = x \left( x \frac{dy}{dx} + \mu y \right).$$

in welchem

$$C_n = -(C_1 + C_2 + \dots + C_{n-1}) \quad (6)$$

und

$$\varphi(u) = (u^{n-1} - x)^{\frac{\lambda-\mu}{n-1}-1} \quad (7)$$

ist, und in welchem, weil  $\varphi(u)$  als ganze algebraische Function von  $u$  vorausgesetzt ist, die in den eckigen Klammern stehenden Polynome abbrechen, somit von endlicher Gestalt sind. Es lässt sich leicht darthun, dass der in (5) stehende Ausdruck der vorgelegten Differentialgleichung genügt, selbst wenn die in (6) stehende Gleichung nicht stattfindet, und dass somit der Ausdruck (5) für willkürliche Werthe von  $C_1, C_2, \dots, C_{n-1}, C_n$  das vollständige Integrale der Gleichung (1) ist.

Sind  $\mu$  und  $\frac{\lambda-\mu}{n-1}$  wohl positive, aber keine ganzen Zahlen, so ist das in (2) stehende  $y$  nicht das vollständige Integrale der vorgelegten Gleichung. Die Gleichung (1) ist nämlich von der  $n$ ten Ordnung, ihr vollständiges Integrale muss somit  $n$  willkürliche Constanten enthalten. Das in (2) aufgestellte  $y$  hat aber bloss  $n-1$  willkürliche Constanten, es muss daher dieses  $y$  noch durch ein particuläres Integral completirt werden.

In dem speciellen Falle, wo  $\lambda$  eine ganze positive Zahl ist, ist es mir gelungen, das vollständige Integrale der vorgelegten Differentialgleichung aufzustellen. Bevor ich diess zeige, will ich darthun, dass die zwei Differentialgleichungen:

$$x \frac{d^n y}{dx^n} + \lambda \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} = x \left( x \frac{dy}{dx} + \mu y \right), \quad (1)$$

$$x \frac{d^n z}{dx^n} + (\lambda + n - 1) \frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}} = x \left( x \frac{dz}{dx} + \mu z \right) \quad (8)$$

Integrale haben, die in folgendem analytischen Zusammenhange stehen:

$$z = \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} - x y. \quad (9)$$

Denn setzt man das so eben aufgestellte  $z$  in die Gleichung (8), so erhält man identisch:

$$\begin{aligned}
& x \frac{d^n z}{dx^n} + (\lambda + n - 1) \frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}} - \kappa \left( x \frac{dz}{dx} + \mu z \right) \\
&= \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left[ x \frac{d^n y}{dx^n} + \lambda \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} - \kappa \left( x \frac{dy}{dx} + \mu y \right) \right] \\
&- \kappa \left[ x \frac{d^n y}{dx^n} + \lambda \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} - \kappa \left( x \frac{dy}{dx} + \mu y \right) \right].
\end{aligned}$$

Es ist also:

$$x \frac{d^n z}{dx^n} + (\lambda + n - 1) \frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}} - \kappa \left( x \frac{dz}{dx} + \mu z \right)$$

für

$$z = \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} - \kappa y \quad (9)$$

identisch Null, wenn

$$x \frac{d^n y}{dx^n} + \lambda \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} - \kappa \left( x \frac{dy}{dx} + \mu y \right)$$

gleich Null ist, was zu beweisen war. Es genügt demnach, die Integration der Gleichung (I) zu zeigen für Werthe von  $\lambda$ , die gleich 1, 2, 3, ...,  $n-1$  sind, und diess soll nun geschehen.

Ich setze voraus, dass das Integrale der Gleichung

$$x \varphi^{(n)}(x) = \kappa \varphi(x) \quad (10)$$

bekannt ist, und behaupte dann, dass das  $y$ , welches der Gleichung (I) in dem Falle genügt, wo  $\lambda$  eine ganze positive Zahl ist, folgende Form habe:

$$y = \int_0^\infty e^{-\frac{u^{n-1}}{n-1}} u^{\mu-1} \psi^{(\lambda)}(ux) du, \quad (11)$$

woselbst  $\varphi^{(\lambda)}(ux)$  der  $\lambda$ te Differentialquotient von  $\varphi(ux)$  ist. — Um diess zu beweisen, substituirt man den eben aufgestellten Werth von  $y$  in die Gleichung (I), man erhält sodann, da

$$\begin{aligned}
y' &= \int_0^\infty e^{-\frac{u^{n-1}}{n-1}} u^\mu \varphi^{(\lambda+1)}(ux) du, \\
y^{(n-1)} &= \int_0^\infty e^{-\frac{u^{n-1}}{n-1}} u^{\mu+n-2} \varphi^{(\lambda+n-1)}(ux) du,
\end{aligned}$$

$$x \frac{d^n y}{dx^n} + \lambda \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} = x \left( x \frac{dy}{dx} + \mu y \right).$$

$$y^{(n)} = \int_0^\infty e^{-\frac{u^{n-1}}{n-1}} u^{\mu+n-1} \varphi^{(\lambda+n)}(ux) du$$

ist, als Resultat der Substitution:

12)

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty e^{-\frac{u^{n-1}}{n-1}} u^{\mu+n-2} [ux \varphi^{(\lambda+n)}(ux) + \lambda \varphi^{(\lambda+n-1)}(ux)] du \\ &= x \int_0^\infty e^{-\frac{u^{n-1}}{n-1}} u^{\mu-1} [ux \varphi^{(\lambda+1)}(ux) + \mu \varphi^{(\lambda)}(ux)] du, \end{aligned}$$

und diese Gleichung soll identisch stattfinden.

Aus der Gleichung

$$x \varphi^{(n)}(x) = x \varphi(x) \quad (10)$$

folgt durch  $\lambda$ maliges Differenziren:

$$x \varphi^{(\lambda+n)}(x) + \lambda \varphi^{(\lambda+n-1)}(x) = x \varphi^{(\lambda)}(x),$$

und setzt man hierin  $ux$  anstatt  $x$ , so erhält man:

$$ux \varphi^{(\lambda+n)}(ux) + \lambda \varphi^{(\lambda+n-1)}(ux) = x \varphi^{(\lambda)}(ux).$$

Wird von dieser Gleichung Gebrauch gemacht, so vereinfacht sich die Gleichung (12) und geht über in:

13)

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty e^{-\frac{u^{n-1}}{n-1}} u^{\mu+n-2} \varphi^{(\lambda)}(ux) du \\ &= \int_0^\infty e^{-\frac{u^{n-1}}{n-1}} u^{\mu-1} [ux \varphi^{(\lambda+1)}(ux) + \mu \varphi^{(\lambda)}(ux)] du. \end{aligned}$$

Nun ist aber:

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty e^{-\frac{u^{n-1}}{n-1}} u^\mu x \varphi^{(\lambda+1)}(ux) du = \int_0^\infty e^{-\frac{u^{n-1}}{n-1}} u^\mu \frac{d \varphi^{(\lambda)}(ux)}{du} du \\ &= \left\{ e^{-\frac{u^{n-1}}{n-1}} u^\mu \varphi^{(\lambda)}(ux) \right\}_0^\infty - \int_0^\infty e^{-\frac{u^{n-1}}{n-1}} u^{\mu-1} (\mu - u^{n-1}) \varphi^{(\lambda)}(ux) du; \end{aligned}$$

folglich hat man, diess berücksichtigend, statt der Gleichung (13) folgende Gleichung:

$$\left\{ e^{-\frac{u^{n-1}}{n-1}} u^\mu \varphi^{(\lambda)}(ux) \right\}_0^\infty = 0,$$

und diese ist identisch, falls

$$e^{-\frac{u^{n-1}}{n-1}} u^\mu \varphi^{(\lambda)}(ux) = 0$$

ist, sowohl für  $u = 0$ , als auch für  $u = \infty$ .

Es ist uns somit in dem Falle, als  $\mu$  und  $\frac{\lambda - \mu}{n-1}$  positive Zahlen sind — von denen wenigstens eine gebrochen ist — und  $\lambda$  eine ganze positive Zahl bezeichnet, gelungen, das Integrale der Gleichung (1) abhängig zu machen von dem Integrale der Gleichung:

$$x \varphi^{(n)}(x) = x \varphi(x). \quad (10)$$

Diese Gleichung hat aber bekanntlich unter ihren  $n$  verschiedenen partikulären Integralen eines, welches einen Logarithmus von  $x$  als Bestandtheil hat, und welches in der Form

$$P + Q \log x$$

auftritt. Dieses eine partikuläre Integrale fassen wir besonders in's Auge, es ist diess dasjenige, das sich der Ermittlung mittelst der Laplace'schen Methode entzog; fügt man diess eine, mit einer willkürlichen Constanten multiplicirt, zu dem in (2) aufgestellten Integrale hinzu, so erhält man das vollständige Integrale der vorgelegten Differentialgleichung.

Die Gleichung (1), deren Integrale wir so eben in folgender Form:

$$y = \int_0^\infty e^{-\frac{u^{n-1}}{n-1}} u^{\mu-1} \varphi^{(\lambda)}(ux) du \quad (11)$$

ermittelt haben, gestattet auch folgende Aufschreibweise:

$$\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} [xy' + (\lambda + 1 - n)y] = n(xy' + \mu y). \quad (12)$$

$$x \frac{d^n y}{dx^n} + \lambda \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} = \kappa \left( x \frac{dy}{dx} + \mu y \right).$$

Nun lässt sich nach einem, von uns im 63sten Bande von Crelle's Journal für Mathematik aufgestellten Satze das Integrale der Gleichung

$$\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} [xz' + (\lambda + 1 - n)z] = \kappa x (xz' + \mu z) \quad (15)$$

bestimmen; es ist nämlich:

$$z = \int_0^\infty e^{-\frac{v^{n-1}}{n-1}} \psi(vx) dv, \quad (16)$$

wobei

$$\psi(x) = \int_0^\infty e^{-\frac{u^{n-1}}{n-1}} u^{\mu-1} \varphi^{(\lambda)}(ux) du$$

ist, falls nur zwischen den  $\kappa$  in  $\varphi(x)$  vorkommenden willkürlichen Constanten eine Bedingungsgleichung erfüllt wird. Demnach erhält man als Integrale der Gleichung (15):

$$z = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{u^{n-1} + v^{n-1}}{n-1}} u^{\mu-1} \varphi^{(\lambda)}(uvx) du dv.$$

Mittelst wiederholter Anwendung derselben Methode lassen sich nun auch die Integrale folgender Gleichungen ermitteln:

$$\frac{d^{n-3}}{dx^{n-3}} [xz' + (\lambda + 1 - n)z] = \kappa x^2 (xz' + \mu z),$$

$$\frac{d^{n-4}}{dx^{n-4}} [xz' + (\lambda + 1 - n)z] = \kappa x^3 (xz' + \mu z),$$

. . . . .



## IV.

**Kennzeichen, ob eine Gleichung dem numerischen Werthe nach gleiche, dem Vorzeichen nach entgegengesetzte Wurzeln besitze.**

Von

**Herrn Franz Müller,**

**Professor am Kön. Böhm. Polytechnikum in Prag.**

---

Es sei gegeben die Gleichung  $F(x) = 0$ , und schreiben wir von derselben die abwechselnden Glieder mit ihren Vorzeichen neben einander, so erhalten wir zwei neue Gleichungen  $\varphi(x)$  und  $x\psi(x)$ , wobei  $\varphi(x)$  und  $\psi(x)$  Polynome sind, deren Glieder nur gerade Potenzen von  $x$  enthalten. Z. B. Es sei

$$F(x) = x^5 + c_1 x^4 + c_2 x^3 + c_3 x^2 + c_4 x + c_5 = 0,$$

so ist:

$$\psi(x) = x^4 + c_2 x^3 + c_4,$$

$$\varphi(x) = c_1 x^4 + c_3 x^2 + c_5.$$

Es ist demnach

$$F(x) = \varphi(x) + x\psi(x) = 0.$$

Nehmen wir an, der Gleichung  $F(x) = 0$  werde durch die Substitution  $+\omega$  und  $-\omega$  Genüge geleistet, oder die Gleichung  $F(x) = 0$  besitze dem Werthe nach gleiche, dem Zeichen nach entgegengesetzte Wurzeln; es sei demnach



$$F(+\omega) = 0 \text{ und } F(-\omega) = 0,$$

so ist auch

$$\varphi(\omega) + \omega \psi(\omega) = 0, \quad \varphi(-\omega) - \omega \psi(-\omega) = 0;$$

und da

$$\varphi(\omega) = \varphi(-\omega), \quad \psi(\omega) = \psi(-\omega);$$

so ist:

$$\varphi(\omega) + \omega \psi(\omega) = 0,$$

$$\varphi(\omega) - \omega \psi(\omega) = 0,$$

und folglich auch

$$\varphi(\omega) = 0 \text{ und } \psi(\omega) = 0;$$

unter dieser Voraussetzung wird folglich auch den Gleichungen  $\varphi(x) = 0$  und  $\psi(x) = 0$  durch die Substitution  $+\omega$  und  $-\omega$  Genüge geleistet.

Besitzt demnach die Gleichung  $F(x) = 0$  numerisch gleiche, dem Zeichen nach entgegengesetzte Wurzeln, so besitzen auch die Gleichungen  $\varphi(x) = 0$  und  $\psi(x) = 0$  dieselben gleich entgegengesetzten Wurzeln. Das grösste gemeinschaftliche Maass zwischen  $\varphi(x)$  und  $\psi(x)$  enthält folglich alle gleich entgegengesetzten Wurzeln der Gleichung  $F(x) = 0$ .

Beispiel. Es sei gegeben die Gleichung:

$$x^{10} + 3x^9 + x^8 - 4x^7 + x^6 + 13x^5 + 5x^4 - 16x^3 - 12x^2 + 4x + 4 = 0,$$

so ist:

$$\varphi(x) = x^{10} + x^8 + x^6 + 5x^4 - 12x^2 + 4,$$

$$\psi(x) = 3x^8 - 4x^6 + 13x^4 - 16x^2 + 4;$$

zwischen  $\varphi(x)$  und  $\psi(x)$  das grösste gemeinschaftliche Maass gesucht erhalten wir:

$$x^6 - x^4 + 4x^2 - 4.$$

Die Gleichung  $x^6 - x^4 + 4x^2 - 4 = 0$  enthält daher alle gleich entgegengesetzten Wurzeln der Gleichung  $F(x) = 0$ .

Setzen wir  $x^2 = z$ , und untersuchen wir die so erhaltene Gleichung  $z^3 - z^2 + 4z - 4 = 0$  ebenfalls auf gleich entgegengesetzte Wurzeln, so ist:

$$\varphi(z) = -z^2 - 4, \quad \psi(z) = z^2 + 4;$$

folglich  $z^2 + 4$  das grösste gemeinschaftliche Maass, und  $z_1 = +2\sqrt{-1}$ ,

$z_3 = -2\sqrt{-1}$ . Die Wurzel  $z_3$  erhalten wir durch Division von  $z^3 - z^2 + 4z - 4$  mit  $z^2 + 4$ , es ist  $z_3 = +1$ .

Die gleich entgegengesetzten Wurzeln der Gleichung  $F(x)=0$  sind daher:

$$\left. \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix} \right\} = \pm \sqrt{2\sqrt{-1}}, \quad \left. \begin{matrix} x_3 \\ x_4 \end{matrix} \right\} = \pm \sqrt{-2\sqrt{-1}}, \quad \left. \begin{matrix} x_5 \\ x_6 \end{matrix} \right\} = \pm 1;$$

oder falls wir die ersten zwei Wurzelpaare auf bekannte Weise transformiren, so ist:

$$\left. \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix} \right\} = \pm (1 + \sqrt{-1}) \quad \left. \begin{matrix} x_3 \\ x_4 \end{matrix} \right\} = \pm (1 - \sqrt{-1}).$$

Von der gegebenen Gleichung 10ten Grades bleibt nur noch die Gleichung 4ten Grades  $x^4 + 3x^3 + 2x^2 - x - 1 = 0$  aufzulösen.

## V.

### Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen.

Von

Herrn Professor Dr. *Dienger*  
an der polytechnischen Schule in Carlsruhe.

Im Nachstehenden betrachte ich die Differentialgleichung

$$X_n \frac{d^n y}{dx^n} + X_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + X_1 \frac{dy}{dx} + X_0 y = 0, \quad (1)$$

in der  $X_n, X_{n-1}, \dots, X_1, X_0$  bloß Funktionen von  $x$  (oder Kon-

stanten) sind. Dass, wenn  $y_1, \dots, y_n$  Funktionen sind, welche der (1) genügen,

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n \quad (2)$$

ebenfalls genügt, setze ich natürlich als bewiesen voraus. Wenn zwischen den Grössen  $y_1, \dots, y_n$  eine Gleichung

$$a_1 y_1 + a_2 y_2 + \dots + a_n y_n = 0 \quad (3)$$

besteht, so werde ich sagen, es bestehe eine lineare Beziehung unter denselben. Dabei setze ich  $a_1, \dots, a_n$  als konstant voraus, und dürfen ganz wohl einige dieser Grössen Null sein.

### §. 1.

Seien  $y_1, y_2, \dots, y_r$  Funktionen von  $x$ , und es werde gesetzt:

$$(4) \quad \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_r \\ \frac{dy_1}{dx} & \frac{dy_2}{dx} & \dots & \frac{dy_r}{dx} \\ \frac{d^2 y_1}{dx^2} & \frac{d^2 y_2}{dx^2} & \dots & \frac{d^2 y_r}{dx^2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{d^{r-1} y_1}{dx^{r-1}} & \frac{d^{r-1} y_2}{dx^{r-1}} & \dots & \frac{d^{r-1} y_r}{dx^{r-1}} \end{vmatrix} = M, \quad \frac{d^s y_m}{dx^s} = y_m^{(s)};$$

so ist die Determinante  $M$  eine Funktion der Grössen  $y_1, \dots, y_r$ ;  $y_1', \dots, y_r'$ ;  $\dots$ ;  $y_1^{(r-1)}, \dots, y_r^{(r-1)}$ ; und folglich:

$$\begin{aligned} \frac{dM}{dx} &= \frac{\partial M}{\partial y_1} y_1' + \dots + \frac{\partial M}{\partial y_r} y_r' + \frac{\partial M}{\partial y_1'} y_1^{(2)} + \dots + \frac{\partial M}{\partial y_r'} y_r^{(2)} + \dots \\ &\dots + \frac{\partial M}{\partial y_1^{(r-1)}} y_1^{(r)} + \dots + \frac{\partial M}{\partial y_r^{(r-1)}} y_r^{(r)}. \end{aligned}$$

Den Grundeigenschaften der Determinanten zufolge ist aber:

$$\frac{\partial M}{\partial y_1^{(s)}} y_1^{(s+1)} + \dots + \frac{\partial M}{\partial y_r^{(s)}} y_r^{(s+1)} = 0; \quad s = 0, 1, 2, \dots, r-2;$$

so dass also:

(5)

$$\frac{dM}{dx} = \frac{\partial M}{\partial y_1^{(r-1)}} y_1^{(r)} + \frac{\partial M}{\partial y_2^{(r-1)}} y_2^{(r)} + \dots + \frac{\partial M}{\partial y_r^{(r-1)}} y_r^{(r)}.$$



$$\frac{\partial M}{\partial y_1^{(r-1)}}, \frac{\partial M}{\partial y_2^{(r-1)}}, \dots; \frac{d}{dx} \frac{\partial M}{\partial y_1^{(r-1)}}, \frac{d}{dx} \frac{\partial M}{\partial y_2^{(r-1)}}, \dots$$

bestimmen. Ist nun nicht  $\frac{\partial M}{\partial y_s^{(r-1)}}$  identisch Null, so ergibt sich aus (8) und (9):

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y_m^{(r-1)}}}{\frac{\partial M}{\partial y_s^{(r-1)}}} = \frac{\frac{d}{dx} \frac{\partial M}{\partial y_m^{(r-1)}}}{\frac{d}{dx} \frac{\partial M}{\partial y_s^{(r-1)}}}; \quad \frac{1}{\frac{\partial M}{\partial y_m^{(r-1)}}} \frac{d}{dx} \frac{\partial M}{\partial y_m^{(r-1)}} = \frac{1}{\frac{\partial M}{\partial y_s^{(r-1)}}} \frac{d}{dx} \frac{\partial M}{\partial y_s^{(r-1)}};$$

$$l\left(\frac{\partial M}{\partial y_m^{(r-1)}}\right) = l\left(\frac{\partial M}{\partial y_s^{(r-1)}}\right) + C_m; \quad \frac{\partial M}{\partial y_m^{(r-1)}} = c_m \frac{\partial M}{\partial y_s^{(r-1)}};$$

$$m = 1, 2, \dots, s-1, s+1, \dots, r.$$

Setzt man diese Werthe in die erste (8) ein, so ergibt sich:

(10)

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_{s-1} y_{s-1} + y_s + c_{s+1} y_{s+1} + \dots + c_n y_n = 0.$$

Wenn also die (6) identisch besteht, so besteht nothwendig zwischen den Funktionen  $y_1, \dots, y_n$  eine lineare Beziehung. Daraus aber folgt weiter, dass, wenn eine solche lineare Beziehung zwischen den eben genannten Funktionen nicht besteht, auch die Gleichung (6) nicht stattfinden kann.

## §. 2.

Wir wollen annehmen,  $y_1$  sei eine Funktion von  $x$ , welche, an die Stelle von  $y$  gesetzt, der (1) identisch genüge. Sodann wollen wir in dieser Gleichung setzen:

$$y = y_1 \int \varphi dx, \quad (11)$$

wo  $\varphi$  eine noch unbekannte Funktion von  $x$  sei und wo wir dem unbestimmten Integrale keine willkürliche Konstante zufügen wollen. Dann erhält man aus (1) zur Bestimmung von  $\varphi$  eine Gleichung der Form:

$$\Phi_{n-1} \frac{d^{n-1} \varphi}{dx^{n-1}} + \Phi_{n-2} \frac{d^{n-2} \varphi}{dx^{n-2}} + \dots + \Phi_1 \frac{d\varphi}{dx} + \Phi_0 \varphi = 0, \quad (12)$$

in welcher  $\Phi_{n-1}, \dots, \Phi_0$  bekannte Funktionen von  $x$  sind, die mit von dem Werthe von  $y_1$  abhängen. Die (12) ist abermals eine lineare Differentialgleichung, aber nur  $(n-1)$ ter Ordnung.

Angenommen nun, man könne  $n-1$  Funktionen:  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}$



sein. Daraus folgt aber nach §. 1. ( $r = n + 1$ ), dass eine lineare Beziehung zwischen den  $y_1, \dots, y_{n+1}$  bestehe. Damit ist nun erwiesen, dass es für die Gleichung (1)  $n$  besondere Integrale  $y_1, \dots, y_n$  gebe (§. 2.), aber nicht mehr (§. 3.), zwischen denen eine lineare Beziehung nicht besteht. Diese geben in (2) das allgemeine Integral.

**§. 4.**

Sind  $y_1, y_2, \dots, y_n$  diese besonderen Integrale, so hat man wie in §.3.:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{X_0}{X_n} y_1 + \frac{X_1 dy_1}{X_n dx} + \dots + \frac{X_{n-1} d^{n-1} y_1}{X_n dx^{n-1}} = -\frac{d^n y_1}{dx^n}, \\ & . . . . . \\ & \frac{X_0}{X_n} y_n + \frac{X_1 dy_n}{X_n dx} + \dots + \frac{X_{n-1} d^{n-1} y_n}{X_n dx^{n-1}} = -\frac{d^n y_n}{dx^n}. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

**Aus den Gleichungen (15) lassen sich die Grössen**

$$\frac{X_0}{X_n}, \frac{X_1}{X_n}, \dots, \frac{X_{n-1}}{X_n} \quad (16)$$

durch  $y_1, \dots, y_n$  und deren Differentialquotienten bis zur  $n$ ten Ordnung ausdrücken, vorausgesetzt, dass nicht

$$\begin{array}{ccccccc} y_1, & y_2, & \dots, & y_n \\ \frac{dy_1}{dx}, & \frac{dy_2}{dx}, & \dots, & \frac{dy_n}{dx} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}, & \frac{d^{n-1}y_2}{dx^{n-1}}, & \dots, & \frac{d^{n-1}y_n}{dx^{n-1}} \end{array} = 0.$$

Da diese Gleichung aber nach §. 1. eine lineare Beziehung zwischen  $y_1, \dots, y_n$  voraussetzt, so kann sie nicht bestehen, und man kann folglich die Grössen (16) bestimmen.

Da eine jede Differentialgleichung  $n$ ter Ordnung, die nach dem höchsten Differentialquotienten aufgelöst ist (was bei der (1) unmittelbar erreicht werden kann), nur eine Integralgleichung haben kann, so ist es ganz überflüssig, erweisen zu wollen, dass die Form (2) für die (1) nothwendig sei. Es genügt vollständig, zu zeigen, dass die Form (2) möglich sei.

## VI.

## Ueber den mittleren Fehler der Resultate aus trigonometrischen Messungen.

Von

Herrn Doctor *Börsch*,

ord. Lehrer an der höheren Gewerbeschule in Cassel.

Ueber die Bestimmung des mittleren Fehlers der aus trigonometrischen Beobachtungen abgeleiteten Functionen, nämlich der Richtungen der einzelnen Dreiecksseiten, bestehen verschiedene Ansichten\*): nach der einen ist der mittlere Fehler einer Richtung gleich der Quadratwurzel aus der Summe der Fehlerquadrate dividirt durch die Anzahl der zwischen den Richtungen bestehenden Bedingungsgleichungen, nach der anderen gleich der Quadratwurzel aus der Summe der Fehlerquadrate dividirt durch die um 1 verminderte Anzahl der Richtungen. Bei der Wichtigkeit dieses Gegenstandes für die Beurtheilung geodätischer Arbeiten, dürfte es gegenwärtig, wo durch die mitteleuropäische Gradmessung über einen grossen Theil von Europa ein Dreiecksnetz gespannt wird, nicht ohne Interesse sein, denselben etwas näher zu betrachten.

Der mittlere Fehler soll im Allgemeinen die Grenzen angeben, innerhalb welcher bei direkten Beobachtungen oder Functionen derselben ein Fehler zu befürchten ist; sind diese Grenzen sehr weit, d. h. existiren zwischen den einzelnen zu beurtheilenden Grössen nur wenige Bedingungen, die sich stets in einer gleichen Anzahl von Bedingungsgleichungen darstellen lassen, so wird der mittlere Fehler gross, ja selbst grösser als die Fehler der einzelnen Grössen sein; je enger man aber die Grenzen zieht, je

\*) Vergleiche Generalbericht über die mitteleuropäische Gradmessung für das Jahr 1865. Berlin 1866, pag. 45 etc., wobei zugleich auf einen daselbst zweimal vorkommenden Druckfehler, nämlich  $2r-6$  statt  $2r-1$ , aufmerksam gemacht wird. — Baeyer, die Küstenvermessung und ihre Verbindung mit der Berliner Grundlinie. Berlin 1849, pag. 353. — Eucke. astronomisches Jahrbuch für 1834, pag. 292. — Gerling. Beiträge zur Geographie Kurhessens. Kassel 1839, pag. 162.









sind Functionen derselben; die Formel  $m = \sqrt{\frac{[vr]}{z_r - 1}}$  oder  $m = \sqrt{\frac{[p.vv]}{z_r - 1}}$  kann also auch in dieser Hinsicht keine Anwendung finden.

Zum Schlusse möge noch nachfolgende Betrachtung hier ihren Platz finden. Hat man zwei Reihen gleichvieler und gleichguter Beobachtungen, und aus denselben eine gleiche Anzahl von Elementen und eine gleiche Anzahl von Bedingungsgleichungen abgeleitet, so wird man den Resultaten aus beiden Reihen von Beobachtungen nach der Formel  $\sqrt{\frac{[vv]}{z_b}}$  voraussichtlich denselben mittleren Fehler, d. h. dieselbe Genauigkeit zuschreiben müssen. Dieses kann zur Beantwortung einer Frage dienen, die schon vielfach aufgeworfen wurde. Müssen nämlich bei einem Dreiecksnetze, wenn es eine hinlängliche Garantie seiner Zuverlässigkeit in sich tragen soll, alle Richtungen von ihren beiden Endpunkten aus gemessen, d. h. in jedem Dreiecke die drei Winkel durch Messung bestimmt sein, oder bleibt, bei übrigens gleichguten Beobachtungen, die Genauigkeit dieselbe, wenn statt einer zweiseitig gemessenen Richtung zwei einseitig gemessene Richtungen, nämlich statt eines Dreiecks mit 3 gemessenen Winkeln 2 Dreiecke mit nur je 2 gemessenen Winkeln eingeführt werden? Da für die Doppelrichtung zwei einseitige Richtungen und für die ausfallende Bedingungsgleichung zwischen den 3 Winkeln eines Dreiecks eine andere zwischen den Sinussen der Winkel zweier Dreiecke, durch Vergleichung ihrer gemeinschaftlichen Seite, hinzukommt, so wird die Anzahl der Fehler sowie die Anzahl der Bedingungsgleichungen nicht geändert, man wird also in beiden Fällen den einzelnen gemessenen Richtungen denselben mittleren Fehler und dem ganzen Dreiecksnetze dieselbe Genauigkeit zuschreiben müssen. Das nur einseitige Messen einer Richtung hat aber in den meisten Fällen seinen Grund darin, dass an dem einen Endpunkte eine sichere Anvisirung nicht zu erzielen war, ja dieses mitunter nicht schon bei der Entwerfung des Dreiecksnetzes, sondern erst bei der Winkelmessung entdeckt wurde, in diesem Falle ist es sogar vorzuziehen, die weniger zuverlässige Messung ganz zu unterlassen, oder, wenn sie schon gemacht ist, nicht zu benutzen, und stattdessen eine weitere einseitige Richtung einzuführen, die mit hinlänglicher Schärfe bestimmt werden kann, die Genauigkeit des Ganzen wird dadurch nur erhöht.

## VII.

### Ueber eine Eigenschaft der Hyperbel.

(Mit Bezugnahme auf einen Aufsatz des Herrn Professor Nicola Cavalieri San Bertolo, commend., in den „Atti dell' Accademia Pontificia dei nuovi Lincei“. Anno XIX. Sess. III<sup>a</sup>. 24 Febr. 1866.).

Von

Herrn *C. Thiel*,

Kandidaten der Mathematik in Greifswald.

---

#### A u f g a b e.

(Taf. III. Fig. 4.).

Zwei im Punkte *A* unter dem Winkel  $\alpha$  sich schneidende Gerade *AX* und *AY* werden von einer dritten Geraden *RS* in den Punkten *B* und *C* so geschnitten, dass  $\Delta CAB = k^2$  ist; verbindet man nun den Mittelpunkt *P* von *BC* mit *A* und theilt *AP* in *N* so, dass

$$NP:AP = 1:k$$

ist, so soll der geometrische Ort des Punktes *N* für alle Lagen von *RS* bestimmt werden, bei denen  $\Delta CAB = k^2$  ist.

**Auflösung.** Es sei *A* Anfang des Coordinatensystems, *AX* der positive Theil der *x*-Axe und *AY* der positive Theil der *y*-Axe.

Die Coordinaten von *C* seien nun  $x_1, 0$ ; die von *B* seien  $0, y_1$ ; also sind die von *P*:  $\frac{1}{2}x_1, \frac{1}{2}y_1$ , und nach den Lehren der analogen Geometrie die von *N*:

$$1) \dots x = \frac{h-1}{2h} x_1, \quad y = \frac{h-1}{2h} y_2.$$

Weil aber nach den Bedingungen der Aufgabe

$$2) \dots \Delta CAB = \frac{1}{2} x_1 y_2 \sin \alpha = k^2,$$

also

$$y_2 = \frac{2k^2}{x_1} \operatorname{cosec} \alpha$$

ist, so ist auch:

$$3) \dots x = \frac{h-1}{2h} x_1, \quad y = \frac{h-1}{hx_1} k^2 \operatorname{cosec} \alpha;$$

und multiplicirt man diese Werthe, so erhält man:

$$4) \dots xy = \frac{1}{2} \left( \frac{h-1}{h} \right)^2 k^2 \operatorname{cosec} \alpha,$$

d. h. die Gleichung einer Hyperbel zwischen ihren Asymptoten.

Um ihre Mittelpunktsleichung zu finden, hat man von dem schiefwinkligen Coordinatensysteme der  $(xy)$  zu einem rechtwinkligen der  $(x'y')$  überzugehen, das denselben Anfangspunkt  $A$  hat und dessen positive  $x'$ -Axe den Asymptotenwinkel  $\alpha$  halbt. Man hat demnach in den Formeln für den Uebergang von einem schiefwinkligen zu einem rechtwinkligen Systeme:

$$x = \frac{x' \sin [(xy) - \xi] - y' \cos [(xy) - \xi]}{\sin (xy)}, \quad y = \frac{x' \sin \xi + y' \cos \xi}{\sin (xy)}$$

$(xy) = \alpha$ ,  $\xi = \frac{1}{2}\alpha$  zu setzen, und erhält:

$$5) \dots x = \frac{x' \sin \frac{1}{2}\alpha - y' \cos \frac{1}{2}\alpha}{\sin \alpha}, \quad y = \frac{x' \sin \frac{1}{2}\alpha + y' \cos \frac{1}{2}\alpha}{\sin \alpha};$$

also durch Multiplication:

$$xy = \frac{x'^2 \sin \frac{1}{2}\alpha^2 - y'^2 \cos \frac{1}{2}\alpha^2}{\sin \alpha^2},$$

und folglich nach 4):

$$\frac{x'^2 \sin \frac{1}{2}\alpha^2 - y'^2 \cos \frac{1}{2}\alpha^2}{\sin \alpha^2} = \frac{1}{2} \left( \frac{h-1}{h} \right)^2 k^2 \operatorname{cosec} \alpha$$

oder:

$$6) \dots x'^2 \operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha - y'^2 \operatorname{cotg} \frac{1}{2}\alpha = \left( \frac{h-1}{h} \right)^2 k^2,$$

oder endlich:

$$7) \left( \frac{x'}{\frac{h-1}{h} \sqrt{\operatorname{cotg} \frac{1}{2}\alpha} \cdot k} \right)^2 - \left( \frac{y'}{\frac{h-1}{h} \sqrt{\operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha} \cdot k} \right)^2 = 1.$$

Der gesuchte geometrische Ort ist also eine Hyperbel mit den Schenkeln des Winkels  $XAY$  als Asymptoten und mit den Halbaxen

$$a = \frac{h-1}{h} \sqrt{\cotg \frac{1}{2}\alpha} \cdot k, \quad b = \frac{h-1}{h} \sqrt{\tg \frac{1}{2}\alpha} \cdot k.$$

Die Abscisse ihres Brennpunktes ist

$$e = \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{h-1}{h} \sqrt{2 \operatorname{cosec} \alpha} \cdot k.$$

Ist  $\alpha = 90^\circ$ , so ist  $\cotg \frac{1}{2}\alpha = \tg \frac{1}{2}\alpha = 1$ ; die Hyperbel ist dann gleichseitig und ihre Gleichung ist:

$$8) \dots \dots \dots x'^2 - y'^2 = \left(\frac{h-1}{h}\right)^2 k^2.$$

Ist  $h = 3$ , so ist  $N$  der Schwerpunkt des Dreiecks  $CAB$ , und man hat daher folgenden

**Lehrsatz.** Der geometrische Ort der Schwerpunkte aller Dreiecke mit demselben Winkel  $\alpha$  und dem constanten Flächeninhalte  $k^2$  ist eine Hyperbel mit den Schenkeln des Winkels als Asymptoten. Ihre Gleichung ist:

$$\left(\frac{x'}{\frac{1}{2} \sqrt{\cotg \frac{1}{2}\alpha} \cdot k}\right)^2 - \left(\frac{y'}{\frac{1}{2} \sqrt{\tg \frac{1}{2}\alpha} \cdot k}\right)^2 = 1,$$

und für  $\alpha = 90^\circ$ , in welchem Falle die Hyperbel gleichzeitig ist:

$$x'^2 - y'^2 = \frac{1}{3} k^2.$$

Multipliziert man die beiden Halbaxen mit einander, so erhält man:

$$9) \dots \dots \dots ab = \left(\frac{h-1}{h}\right)^2 k^2,$$

und folglich:

$$10) \dots \dots \dots k^2 = \left(\frac{h}{h-1}\right)^2 ab,$$

und das giebt folgenden

**Lehrsatz.** Zieht man vom Mittelpunkte  $A$  einer Hyperbel nach einem beliebigen Punkte  $N$  derselben eine Gerade, verlängert sie über  $N$  hinaus bis  $P$ , so dass

$$NP:AP = 1:h,$$

und zieht durch  $P$  eine Gerade bis zum Durchschnitte mit den beiden Asymptoten in  $B$  und  $C$  so, dass  $BC$  in  $P$  halbt wird, so ist der Flächeninhalt des Dreiecks  $ABC$  ein constanter, nemlich





Auch hier hat der Ausdruck  $\varphi^2$  eine ähnliche Bedeutung wie früher.

Soll der berührende Kegel ein Rotationskegel sein, so müssen folgende, aus der Vergleichung von (V) und (VI) resultirende Bedingungsgleichungen bestehen:

(15)

$$\frac{1}{2} \left\{ 1 - \left( \frac{q}{b} \right)^2 - \left( \frac{r}{c} \right)^2 \right\} = \frac{A^2 \varphi^2 - 1}{\varphi^2 - 1} \left\{ 1 - \left( \frac{p}{a} \right)^2 - \left( \frac{q}{b} \right)^2 \right\} \quad \dots (\alpha)$$

$$\frac{1}{2} \left\{ 1 - \left( \frac{p}{a} \right)^2 - \left( \frac{r}{c} \right)^2 \right\} = \frac{B^2 \varphi^2 - 1}{\varphi^2 - 1} \left\{ 1 - \left( \frac{p}{a} \right)^2 - \left( \frac{q}{b} \right)^2 \right\} \quad \dots (\beta)$$

$$\frac{c^2 p q}{a^2 b^2} = A B \frac{\varphi^2}{\varphi^2 - 1} \left\{ 1 - \left( \frac{p}{a} \right)^2 - \left( \frac{q}{b} \right)^2 \right\} \quad \dots (\gamma)$$

$$\frac{p r}{a^2} = A \frac{\varphi^2}{\varphi^2 - 1} \left\{ 1 - \left( \frac{p}{a} \right)^2 - \left( \frac{q}{b} \right)^2 \right\} \quad \dots (\delta)$$

$$\frac{q r}{b^2} = B \frac{\varphi^2}{\varphi^2 - 1} \left\{ 1 - \left( \frac{p}{a} \right)^2 - \left( \frac{q}{b} \right)^2 \right\} \quad \dots (\epsilon)$$

Wir haben hier fünf Gleichungen zwischen sechs Variablen  $p, q, r, A, B, \varphi$ , (weil  $\varphi$ , obzwar es die Grössen  $M$  und  $N$  enthält, bloss als eine Variable angesehen werden darf), woraus schon hervorgeht, dass der geometrische Ort der Kegelspitzen durch zwei Gleichungen gegeben, also eine Linie sein wird.

Eliminiren wir demnach die Grössen  $A, B, \varphi$ , so werden diese sich, wie folgt, ergeben.

Aus ( $\gamma$ ), ( $\delta$ ) und ( $\epsilon$ ) erhalten wir:

$$A = \frac{c^2 p}{a^2 r}, \quad B = \frac{c^2 q}{b^2 r}; \quad \dots (16)$$

wie:

$$\frac{\varphi^2}{\varphi^2 - 1} = \frac{r^2}{c^2} \cdot \frac{1}{1 - \left( \frac{p}{a} \right)^2 - \left( \frac{q}{b} \right)^2}.$$

zeichnet man weiters den Ausdruck

$$1 - \left( \frac{p}{a} \right)^2 - \left( \frac{q}{b} \right)^2 - \left( \frac{r}{c} \right)^2 \quad \dots (17)$$

als  $U$ , und setzt diese Werthe in die beiden Gleichungen ( $\alpha$ ) und ( $\beta$ ), so erhält man aus ( $\alpha$ ):

$$\frac{1}{2} \left\{ U + \left( \frac{p}{a} \right)^2 \right\} = \frac{-\frac{c^4 p^2}{a^4 r^2} \cdot \frac{r^2}{c^2} \cdot \frac{1}{U} - 1}{-\frac{r^2}{c^2} \cdot \frac{1}{U} - 1} \left\{ U + \left( \frac{r}{c} \right)^2 \right\} = \frac{c^2 p^2}{a^4} + U,$$





hinreichen, wovon die erste die Lage der Kegelspitze  $S$ , die zweite die Neigung der Kegelaxe gegen die Coordinatenaxe  $OX$  angibt, wenn wir mit  $p$  und  $q$  die Coordinaten  $OP$  und  $SP$  der Kegelspitze und mit  $\varepsilon_1 = \sqrt{a^2 - c^2}$ ,  $\varepsilon_2 = \sqrt{c^2 - b^2}$  die Axenlängen der Hyperbel, in welcher die Kegelspitze  $S$  liegt, bezeichnen.

3) Endlich erhalten wir, wie aus der Anmerkung des §. I. ersichtlich ist, eine Relation:

$$\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \delta} - \varphi^2 = - \frac{1}{A} \cdot \frac{c^2}{a^2 b^2} \cdot \frac{pq}{1 - \left(\frac{p}{a}\right)^2 - \left(\frac{q}{b}\right)^2}$$

zwischen den Winkeln  $\alpha$  und  $\delta$ .

Durch Elimination der Grössen  $p$ ,  $q$  und  $\delta$  aus diesen vier Gleichungen wird eine Gleichung zwischen  $\rho$  und  $\alpha$  resultiren, welche die zu suchende Kurve bestimmen wird.

Fassen wir mithin die Gleichungen in 2) in's Auge und bestimmen aus denselben die Werthe  $p$  und  $q$ , so ergeben sich hiefür einfach die Ausdrücke:

$$p^2 = \frac{\varepsilon_1^4 \operatorname{tg}^2 \alpha}{\varepsilon_1^2 \operatorname{tg}^2 \alpha - \varepsilon_2^2},$$

$$q^2 = \frac{\varepsilon_2^4}{\varepsilon_1^2 \operatorname{tg}^2 \alpha - \varepsilon_2^2};$$

folglich:

$$pq = \frac{\varepsilon_1^2 \varepsilon_2^2 \operatorname{tg} \alpha}{\varepsilon_1^2 \operatorname{tg}^2 \alpha - \varepsilon_2^2}.$$

Diese Werthe, in die letzte der vier Gleichungen gesetzt, geben:

$$\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \delta} = - \frac{c^2 \varepsilon_1^2 \varepsilon_2^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}{a^2 b^2 (\varepsilon_1^2 \operatorname{tg}^2 \alpha - \varepsilon_2^2) - b^2 \varepsilon_1^4 \operatorname{tg}^2 \alpha - a^2 \varepsilon_1^4}.$$

Werden im Nenner die Glieder, welche  $\operatorname{tg}^2 \alpha$  enthalten, zusammengezogen, und wird berücksichtigt, dass  $a^2 - \varepsilon_1^2 = c^2$ ,  $b^2 + \varepsilon_2^2 = c^2$  ist, so lässt sich der Bruch durch  $c^2$  abkürzen, wodurch er die Form erhält:

$$\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \delta} = - \frac{\varepsilon_1^2 \varepsilon_2^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}{b^2 \varepsilon_1^2 \operatorname{tg}^2 \alpha - a^2 \varepsilon_2^2} = \frac{\varepsilon_1^2 \varepsilon_2^2 \sin^2 \alpha}{a^2 \varepsilon_2^2 \cos^2 \alpha - b^2 \varepsilon_1^2 \sin^2 \alpha}.$$

Hieraus folgt, wenn zu beiden Seiten der Gleichung durch  $\sin^2 \alpha$  abgekürzt und der reziproke Werth genommen wird:

$$\cos^2 \delta = \frac{a^2 \varepsilon_2^2 \cos^2 \alpha - b^2 \varepsilon_1^2 \sin^2 \alpha}{\varepsilon_1^2 \varepsilon_2^2},$$

daher:

$$\sin^2 \delta = 1 - \cos^2 \delta = \frac{\varepsilon_1^2 \varepsilon_2^2 - a^2 \varepsilon_2^2 \cos^2 \alpha + b^2 \varepsilon_1^2 \sin^2 \alpha}{\varepsilon_1^2 \varepsilon_2^2}.$$

Die erste der aufgestellten Bedingungsgleichungen quadriert, gibt:

$$\varrho^2 = \frac{R^2}{\sin^2 \delta},$$

und für  $\sin^2 \delta$  den oben gefundenen Werth gesetzt:

$$\varrho^2 = \frac{\varepsilon_1^2 \varepsilon_2^2 R^2}{c^2 \varepsilon_1^2 \varepsilon_2^2 + b^2 \varepsilon_1^2 \sin^2 \alpha - a^2 \varepsilon_2^2 \cos^2 \alpha},$$

als die Polargleichung der zu suchenden Kurve.

Sollen die rechtwinkligen Coordinaten eingeführt werden, so hat man bekanntlich

$$\varrho^2 = x^2 + y^2, \quad \sin^2 \alpha = \frac{y^2}{x^2 + y^2}, \quad \cos^2 \alpha = \frac{x^2}{x^2 + y^2}$$

in substituieren. Wird dies vorgenommen und die ganze Gleichung durch  $x^2 + y^2$  abgekürzt, so erhält man:

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{\varepsilon_1^2 \varepsilon_2^2 R^2}{\varepsilon_1^2 \varepsilon_2^2 (x^2 + y^2) - a^2 \varepsilon_2^2 x^2 + b^2 \varepsilon_1^2 y^2} \\ &= \frac{\varepsilon_1^2 \varepsilon_2^2 R^2}{\varepsilon_1^2 y^2 (b^2 + \varepsilon_2^2) - \varepsilon_2^2 x^2 (a^2 - \varepsilon_1^2)} \\ &= \frac{\varepsilon_1^2 \varepsilon_2^2 R^2}{\varepsilon_1^2 c^2 y^2 - \varepsilon_2^2 c^2 x^2}. \end{aligned}$$

Es ist sonach:

$$c^2 \varepsilon_1^2 y^2 - c^2 \varepsilon_2^2 x^2 = \varepsilon_1^2 \varepsilon_2^2 R^2,$$

oder:

$$\frac{y^2}{\left(\frac{R \varepsilon_2}{c}\right)^2} - \frac{x^2}{\left(\frac{R \varepsilon_1}{c}\right)^2} = 1 \quad \dots \dots \dots (IX)$$

Die Gleichung der zu bestimmenden Kurve, folglich diese eine Hyperbel, deren reelle Axe mit der Richtung der imaginären der in §. 1. erhaltenen Hyperbel (III), und umgekehrt, zusammenfällt, und deren Axenlängen den Axenlängen dieser Hyperbel (III) derart proportional erscheinen, dass das Verhältniss

der reellen Axe der einen mit der imaginären Axe der anderen Hyperbel, und umgekehrt, durch den Quotienten  $\frac{R}{c}$  angegeben wird.

Wäre  $R = c$ , d. h. der Halbmesser der Kugel gleich der mittleren Axe des Ellipsoides angenommen worden, so würde für diesen Fall

$$\left(\frac{y}{\varepsilon_2}\right)^2 - \left(\frac{x}{\varepsilon_1}\right)^2 = 1$$

die Gleichung unserer Hyperbel sein, woraus ersichtlich ist, dass diese sodann mit der Hyperbel (III) gleiche Axenlängen besitzt, und nur der Unterschied obwaltet, dass die reelle Axe der ersteren zur imaginären Axe der letzteren Hyperbel, und umgekehrt, wird.

### §. 8.

Suchen wir endlich wieder jene Fläche, welche durch die aufeinanderfolgenden Lagen der Ebenen des Berührungskreises von der angenommenen Kugel mit dem Kegel gebildet wird, so muss diese, der horizontalen Lage der Hyperbel (IX) wegen, eine vertikale Cylinderfläche sein, und es werden auch hier, wie in §. 5., aus den Gleichungen

$$px + qy = 0,$$

$$\left(\frac{q}{m}\right)^2 - \left(\frac{p}{n}\right)^2 = 1$$

und dem ersten Differentialquotienten

$$x + y \frac{dq}{dp} = 0$$

die Grössen  $p$  und  $q$  zu eliminiren sein, um die Trace dieser Cylinderfläche auf der Coordinatenebene  $XOY$  zu erhalten. Hierbei bezeichnen  $p$  und  $q$  die Coordinaten der einzelnen Punkte der eben gefundenen Hyperbel (IX), und wurde  $m$  und  $n$ , der Kürze halber, für die Axenlängen  $\frac{R\varepsilon_2}{c}$  und  $\frac{R\varepsilon_1}{c}$  gesetzt.

Aus diesen Gleichungen findet man:

$$p = -\frac{n^2 q x}{m^2 y},$$





















Punkten geben wird, von welchen aus an das Ellipsoid berührende Rotationskegel möglich sind, und es soll Gegenstand der folgenden Betrachtung sein, die Lage dieser Kegelmittelpunkte zu bestimmen.

Zu diesem Ende nehmen wir in der Ebene  $XOY$  einen Punkt  $M$  an, dessen Coordinaten  $OP = p$ ,  $MP = q$  sind, und der die eben besprochene Eigenschaft besitzen soll; legen durch diesen als Spitze einen das Ellipsoid berührenden Kegel, so wie einen beliebigen Rotationskegel mit horizontaler Axe, und untersuchen sodann, unter welchen Bedingungen diese beiden Kegel zusammenfallen.

Für eine Tangirungsebene an das Ellipsoid haben wir bekanntlich die Gleichung:

$$\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} + \frac{zz'}{c^2} = 1,$$

wobei  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  die Coordinaten des Berührungspunktes sind. Setzen wir die Bedingung, dass die Ebene durch den Punkt  $A$  gehen soll, in die obige Gleichung, indem wir  $x = p$ ,  $y = q$ ,  $z = 0$  substituieren, so stellt die so erhaltene Gleichung, in Verbindung mit jener des Ellipsoids, die Gleichung der Berührungcurve dar; somit sind:

$$\frac{px}{a^2} + \frac{qy}{b^2} = 1 \dots \dots \dots (1)$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \dots \dots \dots (2)$$

die Gleichungen der Leitlinie unseres Kegels.

Die Erzeugende wird offenbar, als durch den Punkt  $M$  gehend, durch die Gleichungen:

$$\left. \begin{array}{l} x - p = Az \\ y - q = Bz \end{array} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

darzustellen sein.

Um nun die Gleichung des berührenden Kegels zu erhalten eliminiren wir vorerst aus diesen vier Gleichungen die Größen  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ; indem wir aus (3)  $x$  und  $y$  durch  $z$  ausdrücken und diese Werthe in (1) und (2) substituieren. Aus (3) folgt:

$$\left. \begin{array}{l} x = Az + p \\ y = Bz + q \end{array} \right\} \dots \dots \dots (4)$$

demnach aus (1) und (4):





welche, durch  $\left[\left(\frac{p}{a}\right)^2 + \left(\frac{q}{b}\right)^2 - 1\right]$  abgekürzt,

$$\begin{aligned} \left(\frac{x-p}{a}\right)^2 \left[\left(\frac{q}{b}\right)^2 - 1\right] + \left(\frac{y-q}{b}\right)^2 \left[\left(\frac{p}{a}\right)^2 - 1\right] - 2\frac{pq}{ab} \left(\frac{x-p}{a}\right) \left(\frac{y-q}{b}\right) \\ = \left(\frac{z}{c}\right)^2 \left[1 - \left(\frac{p}{a}\right)^2 - \left(\frac{q}{b}\right)^2\right] \dots \dots \dots (I) \end{aligned}$$

oder in anderer Form geschrieben,

$$\begin{aligned} \left[\frac{q(x-p) - p(y-q)}{ab}\right]^2 \\ = \left(\frac{x-p}{a}\right)^2 + \left(\frac{y-q}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 \left[1 - \left(\frac{p}{a}\right)^2 - \left(\frac{q}{b}\right)^2\right] \dots (I') \end{aligned}$$

als die zu suchende Gleichung der Kegelfläche liefert.

Nehmen wir nun in der Ebene  $XOY$  eine durch  $M$  gehende Gerade, deren Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} (x-p) &= A(y-p) \\ z &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (7)$$

sein mögen, als die Axe eines Kegels an, dessen Spitze in  $M$  liegen soll, und der durch Rotation einer Geraden

$$\left. \begin{aligned} x-p &= Mz \\ y-q &= Nz \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (8)$$

um diese Axe entstanden ist.

Um die Gleichung dieses Kegels aufzustellen, denke man sich denselben durch eine auf die Axe senkrechte Ebene

$$x = -\frac{1}{A}y + \alpha, \dots \dots \dots (9)$$

so wie durch eine Kugelfläche geschnitten, welche ihren Mittelpunkt in  $M$  hat, und deren Gleichung sonach

$$(x-p)^2 + (y-q)^2 + z^2 = \beta^2 \dots \dots \dots (10)$$

ist, so werden beide Schnitte Kreislinien sein, und es muss offenbar eine Relation

$$\beta^2 = \varphi(\alpha)$$

stattfinden.

Eliminiert man daher aus (9), (10) und (8) die Grössen  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,

indem man aus (8) die Werthe für  $x$  und  $y$  in (9) und (10) setzt, und den aus (9) erhaltenen Werth

$$z = \frac{A(\alpha-p)-q}{AM+N}$$

in (10) substituirt, so ergibt sich:

$$M^2 z^2 + N^2 z^2 + z^2 = \beta^2,$$

$$z^2 (M^2 + N^2 + 1) = \frac{[A(\alpha-p)-q]^2}{[AM+N]^2} (M^2 + N^2 + 1) = \beta^2;$$

und, für  $A(\alpha-p)$  den Werth  $A(x-p) + y$  aus (9) gesetzt:

$$[A(x-p) + (y-q)]^2 \frac{M^2 + N^2 + 1}{[AM+N]^2} = (x-p)^2 + (y-q)^2 + z^2, (11')$$

oder:

$$\begin{aligned} (x-p)^2 \left[ A^2 \frac{M^2 + N^2 + 1}{(AM+N)^2} - 1 \right] + (y-q)^2 \left[ \frac{M^2 + N^2 + 1}{(AM+N)^2} - 1 \right] \\ + 2A(x-p)(y-q) \frac{M^2 + N^2 + 1}{(AM+N)^2} = z^2 \dots (11) \end{aligned}$$

als die verlangte Gleichung des Rotationskegels.

Soll nun jeder durch (I) dargestellte Berührungskegel in einen Rotationskegel übergehen, so müssen die beiden Ausdrücke (I) und (II) identisch werden, woraus folgende Bedingungsgleichungen resultiren:

(11)

$$\frac{c^2}{a^2} \left[ \left( \frac{q}{b} \right)^2 - 1 \right] = [A^2 \varphi^2 - 1] \left[ 1 - \left( \frac{p}{a} \right)^2 - \left( \frac{q}{b} \right)^2 \right],$$

$$\frac{c^2}{b^2} \left[ \left( \frac{p}{a} \right)^2 - 1 \right] = (\varphi^2 - 1) \left[ 1 - \left( \frac{p}{a} \right)^2 - \left( \frac{q}{b} \right)^2 \right],$$

$$\frac{c^2 pq}{a^2 b^2} = -A\varphi^2 \left[ 1 - \left( \frac{p}{a} \right)^2 - \left( \frac{q}{b} \right)^2 \right];$$

wenn, der Kürze halber, der Ausdruck:

$$\frac{M^2 + N^2 + 1}{(AM+N)^2} = \varphi^2$$

gesetzt wird \*).

\*) Die Bedeutung dieser Grösse  $\varphi$  ergibt sich einfach aus folgender









oder:

$$c^2 \left( \frac{x_2}{y_2} \right)^2 + c^2 = a^2 \left( \frac{x_2}{y_2} \right)^2 + b^2,$$

woraus die trigonometrische Tangente  $\frac{x_2}{y_2}$  dieser vier Berührenden mit der Axe  $XX'$

$$\frac{x_2}{y_2} = \operatorname{tg} \varphi = \sqrt{\frac{c^2 - b^2}{a^2 - c^2}}$$

resultirt, welcher Werth dem Quozienten aus den beiden Hyperbelaxen gleich ist, mithin die Asymptoten zu jenen Tangenten parallel sein müssen.

Rein geometrisch lässt sich die Richtigkeit der obigen Konstruktion folgendermassen nachweisen:

Denkt man sich aus einem in unendlicher Entfernung liegenden Punkte der Hyperbel an das Ellipsoid den berührenden Kegel gelegt, so übergeht dieser in einen berührenden Cylinder, welcher das Ellipsoid in einer Ellipse berühren wird. Diese Ellipse liegt in einer durch die Axe  $c$  gehenden Vertikalebene, deren Trace auf der Ebene  $XOY$  durch den zur Richtung der Asymptoten conjugirten Durchmesser gegeben ist.

Weil nun dieser Cylinder ein senkrechter, von kreisförmiger Leitlinie sein soll, so muss derselbe auch eine Kugel vom Radius  $c$  berühren, welche denselben Mittelpunkt  $O$  hat, und deren Schnitt mit der Ebene  $XOY$  der Kreis  $CC'DD'$  ist. Da nun die Erzeugenden des Cylinders parallel zu den Asymptoten sind, so wird sich die Richtung der Letzteren ergeben, wenn man an die Ellipse und den Kreis die gemeinschaftlichen Berührenden legt.

#### §. 4.

Aus der letzten der drei Gleichungen (11) folgt:

$$A\varphi^2 = - \frac{c^2 pq}{a^2 b^2 \left[ 1 - \left( \frac{p}{a} \right)^2 - \left( \frac{q}{b} \right)^2 \right]},$$

welcher Werth in die erste gesetzt,

$$\begin{aligned} \frac{c^2}{a^2} \left[ \left( \frac{q}{b} \right)^2 - 1 \right] &= - \left\{ A \frac{c^2 pq}{a^2 b^2 \left[ 1 - \left( \frac{p}{a} \right)^2 - \left( \frac{q}{b} \right)^2 \right]} + 1 \right\} \cdot \left[ 1 - \left( \frac{p}{a} \right)^2 - \left( \frac{q}{b} \right)^2 \right] \\ &= - \left\{ A \frac{c^2 pq}{a^2 b^2} + 1 - \left( \frac{p}{a} \right)^2 - \left( \frac{q}{b} \right)^2 \right\}, \end{aligned}$$



daher:

$$A \frac{c^2 pq}{a^2 b^2} = \left(\frac{p}{a}\right)^2 + \left[\left(\frac{q}{b}\right)^2 - 1\right] \left[1 - \left(\frac{c}{a}\right)^2\right]$$

$$= \frac{a^2 - c^2}{a^2} \left\{ \frac{p^2}{a^2 - c^2} + \left(\frac{q}{b}\right)^2 - 1 \right\}$$

liefert.

Nun ist auch

$$\frac{p^2}{a^2 - c^2} - \frac{q^2}{c^2 - b^2} = 1,$$

daher:

$$\frac{p^2}{a^2 - c^2} = 1 + \frac{q^2}{c^2 - b^2}.$$

Wird dieser Werth in die letztgefundene Gleichung gesetzt, so ergibt sich:

$$q^2 \left[ 1 + \frac{b^2}{c^2 - b^2} \right] = \frac{q^2}{c^2 - b^2} = \frac{Ac^2 pq}{a^2 - c^2},$$

woraus

$$A = \frac{a^2 - c^2}{c^2 - b^2} \cdot \frac{q}{p}$$

wird Differenzirt man die Gleichung (III) nach  $q$ , so erhält man:

$$\frac{2p \frac{dp}{dq}}{a^2 - c^2} = \frac{2q}{c^2 - b^2},$$

folglich:

$$\frac{dp}{dq} = \frac{a^2 - c^2}{c^2 - b^2} \cdot \frac{q}{p}.$$

Es ist somit:

$$A = \frac{dp}{dq},$$

woraus erhellt, dass die Kegelaxe stets die Hyperbel tangirt, oder mit anderen Worten, dass die gefundene Hyperbel die einhüllende Kurve sämtlicher Axen der Rotationskegel ist.

## §. 5.

Um die Fläche zu bestimmen, welche die aufeinanderfolgenden Lagen jener Ebenen umhüllt, in welchen die Berührungskurven

der Rotationskegel und des Ellipsoids liegen, ist zu berücksichtigen, dass unserer Annahme zufolge alle diese Ebenen senkrecht auf die Coordinatenebene  $XOY$  sind, folglich einen Cylinder einhüllen werden, dessen Erzeugenden parallel zur Axe  $OZ$  sein müssen. Es wird demnach die nachfolgende Untersuchung darauf beschränkt, die Leitlinie der Cylinderfläche in der Ebene  $XOY$  aufzusuchen, welche sich als umhüllende Kurve sämtlicher Tracen der obgenannten Ebenen auf dieser Coordinatenebene geben wird.

Nach (I) ist die allgemeine Gleichung dieser Tracen:

$$\frac{px}{a^2} + \frac{qy}{b^2} = 1,$$

wobei für  $p$  und  $q$  die Bedingungsgleichung

$$\left(\frac{p}{\varepsilon_1}\right)^2 - \left(\frac{q}{\varepsilon_2}\right)^2 = 1$$

stattfindet, wenn wir nämlich  $\varepsilon_1 = \sqrt{a^2 - c^2}$ ,  $\varepsilon_2 = \sqrt{c^2 - b^2}$  setzen

Nach der Theorie der einhüllenden Kurven müssen wir die Grössen  $p$  und  $q$  aus diesen beiden Gleichungen und aus denselben sich ergebenden Differentialquotienten  $\frac{dp}{dq}$  eliminieren, um zu dem gewünschten Resultate zu gelangen.

Durch Differentiation beider erhält man:

$$\frac{x}{a^2} \cdot \frac{dp}{dq} + \frac{y}{b^2} = 0,$$

$$\frac{p}{\varepsilon_1^2} \cdot \frac{dp}{dq} - \frac{q}{\varepsilon_2^2} = 0;$$

folglich hieraus durch Elimination von  $\frac{dp}{dq}$

$$p = - \left(\frac{b}{a}\right)^2 \cdot \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right)^2 \cdot \left(\frac{x}{y}\right) \cdot q.$$

Diesen Werth in die beiden oberen Relationen substituiert, folgt:

$$\begin{aligned} q &= \frac{y}{\left(\frac{y}{b}\right)^2 - \left(\frac{b}{a}\right)^2 \cdot \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right)^2 \cdot \left(\frac{x}{a}\right)^2}, \\ q^2 \left\{ \frac{1}{\varepsilon_1^2} \cdot \frac{b^4}{a^4} \cdot \frac{\varepsilon_1^4}{\varepsilon_2^4} \cdot \frac{x^2}{y^2} - \frac{1}{\varepsilon_2^2} \right\} &= 1 = \frac{q^2}{\varepsilon_2^2} \cdot \frac{b^4 \varepsilon_1^2 x^2 - a^4 \varepsilon_2^2 y^2}{a^4 \varepsilon_2^2 y^2} \\ &= \frac{a^8 b^4 \varepsilon_2^4 y^2}{[a^4 \varepsilon_2^2 y^2 - b^4 \varepsilon_1^2 x^2]^2} \cdot \frac{b^4 \varepsilon_1^2 x^2 - a^4 \varepsilon_2^2 y^2}{a^4 \varepsilon_2^2 y^2} = \frac{a^4 b^4}{b^4 \varepsilon_1^2 x^2 - a^4 \varepsilon_2^2 y^2}. \end{aligned}$$



die Kegelspitze in einer Hauptebene anzunehmen, und bezeichnen die Coordinaten derselben mit  $p, q, r$ , so sind

$$\left. \begin{aligned} \frac{px}{a^2} + \frac{qy}{b^2} + \frac{rz}{c^2} &= 1 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} &= 1 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

die Gleichungen der Berührungskurve des Ellipsoids, und

$$\left. \begin{aligned} x - p &= A(z - r) \\ y - q &= B(z - r) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

jene der Erzeugenden des Kegels.

Werden die Werthe für  $y$  und  $x$  aus (14) bestimmt, und (13) gesetzt, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{p}{a^2}(p + Az - Ar) + \frac{q}{b^2}(q + Bz - Br) + \frac{r}{c^2}z &= 1, \\ \frac{1}{a^2}(Az + p - Ar)^2 + \frac{1}{b^2}(Bz + q - Br)^2 + \frac{z^2}{c^2} &= 1; \end{aligned}$$

und aus der oberen:

$$z = \frac{1 - \left(\frac{p}{a}\right)^2 - \left(\frac{q}{b}\right)^2 + A\frac{rp}{a^2} + B\frac{rq}{b^2}}{\frac{Ap}{a^2} + \frac{Bq}{b^2} + \frac{r}{c^2}},$$

folglich auch:

$$\begin{aligned} Az + p - Ar &= \frac{A\left[1 - \left(\frac{q}{b}\right)^2 - \left(\frac{r}{c}\right)^2\right] + \frac{Bpq}{b^2} + \frac{pr}{c^2}}{\frac{Ap}{a^2} + \frac{Bq}{b^2} + \frac{r}{c^2}}, \\ Bz + q - Br &= \frac{B\left[1 - \left(\frac{p}{a}\right)^2 - \left(\frac{r}{c}\right)^2\right] + \frac{Apq}{a^2} + \frac{qr}{c^2}}{\frac{Ap}{a^2} + \frac{Bq}{b^2} + \frac{r}{c^2}}. \end{aligned}$$

Diese Werthe, in die untere Gleichung gesetzt, verwandelt dieselbe in folgende:



Setzt man endlich für  $A$  und  $B$  die Werthe aus (14), so erhält man die Gleichung des berührenden Kegels:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{x-p}{a}\right)^2 \left[1 - \left(\frac{q}{b}\right)^2 - \left(\frac{r}{c}\right)^2\right] + \left(\frac{y-q}{b}\right)^2 \left[1 - \left(\frac{p}{a}\right)^2 - \left(\frac{r}{c}\right)^2\right] \\ & + \left(\frac{z-r}{c}\right)^2 \left[1 - \left(\frac{p}{a}\right)^2 - \left(\frac{q}{b}\right)^2\right] + 2\left(\frac{x-p}{a}\right)\left(\frac{y-q}{b}\right)\frac{pq}{ab} \\ & + 2\left(\frac{x-p}{a}\right)\left(\frac{z-r}{c}\right)\frac{pr}{ac} + 2\left(\frac{y-q}{b}\right)\left(\frac{z-r}{c}\right)\frac{qr}{bc} = 0. \quad \dots \quad (V) \end{aligned}$$

Für den bezüglichen Rotationskegel haben wir wieder

$$\begin{aligned} x-p &= A(z-r), \\ y-q &= B(z-r) \end{aligned}$$

als Gleichungen der Rotationsaxe, und

$$\begin{aligned} x-p &= M(z-r), \\ y-q &= N(z-r) \end{aligned}$$

jene der rotirenden Geraden, daher

$$Ax + By + z = \alpha$$

die Gleichung einer auf der Rotationsaxe senkrecht stehenden Ebene, und

$$(x-p)^2 + (y-q)^2 + (z-r)^2 = \beta^2$$

jene einer Kugelfläche, die ihren Mittelpunkt in  $M$  hat.

Eliminirt man aus diesen Gleichungen  $x$ ,  $y$  und  $z$ , so ergibt sich die Bedingungsgleichung

$$\left[\frac{\alpha-r-Ap-Bq}{AM+BN+1}\right]^2 (M^2+N^2+1) = \beta^2,$$

und werden für  $\alpha$  und  $\beta^2$  die Werthe gesetzt, so folgt:

(VI')

$$\{A(x-p)+B(y-q)+(z-r)\}^2 \frac{M^2+N^2+1}{(AM+BN+1)^2} = (x-p)^2 + (y-q)^2 + (z-r)^2$$

oder:

(VI)

$$\begin{aligned} & (x-p)^2 (A^2 \varphi^2 - 1) + (y-q)^2 (B^2 \varphi^2 - 1) + (z-r)^2 (\varphi^2 - 1) \\ & + 2AB(x-p)(y-q)\varphi^2 + 2A(x-p)(z-r)\varphi^2 + 2B(y-q)(z-r)\varphi^2 = 0, \end{aligned}$$

wenn wir nämlich der Kürze halber

$$\frac{M^2+N^2+1}{(AM+BN+1)^2} = \varphi^2$$

setzen, als die Gleichung des Rotationskegels.

sechsten und siebenten Wurzel ergab sich dasselbe Verhältniss. Nun vermuthete ich, es sei dies ein allgemeines Gesetz. Nachdem ich bei genauerer Untersuchung noch gefunden, dass die auf die Ausziehung der Quadrat- und Kubikwurzel bezüglichen Gesetze sich unter das neu gefundene subsumiren lassen, versuchte ich, dasselbe als allgemein gültig zu erweisen. Dies ist mir vollständig gelungen, und die vorliegende Abhandlung ist das Ergebniss meiner Bemühungen. Obgleich das Gefundene, wie schon oben bemerkt, nicht von praktischem Nutzen ist, so hat es, wie ich meine, doch einen wissenschaftlichen Werth, und dies ermuthigt mich, es der Oeffentlichkeit zu übergeben.

Schliesslich bemerke ich noch, dass diese Abhandlung nur für Solche geschrieben ist, welche mit der Behandlung der Kettenbrüche sich schon vertraut gemacht haben.

Hückeswagen im Januar 1865.

# §. 1.

Die grösste in  $\sqrt[n]{A}$  enthaltene ganze Zahl sei  $=a$ . Dann ist

$$x = \sqrt[n]{A} = a + \frac{\sqrt[n]{A} - a}{1} = a + \frac{1}{x'},$$

$$x' = \frac{1}{\sqrt[n]{A} - a} = \frac{\left. \begin{array}{l} \sqrt[n]{A^{n-1}} + a\sqrt[n]{A^{n-2}} + a^2\sqrt[n]{A^{n-3}} + \dots \\ \dots + a^{n-4}\sqrt[n]{A^3} + a^{n-3}\sqrt[n]{A^2} + a^{n-2}\sqrt[n]{A} + a^{n-1} \end{array} \right\}}{A - a^n} \\ = a' + \frac{1}{x''},$$

(die grössten in diesem und den folgenden vollständigen Quotienten enthaltenen ganzen Zahlen benennen wir nämlich mit  $a'$ ,  $a''$ ,  $a'''$ , u. s. w.)

$$x'' = \frac{A - a^n}{\left. \begin{array}{l} \sqrt[n]{A^{n-1}} + a\sqrt[n]{A^{n-2}} + a^2\sqrt[n]{A^{n-3}} + \dots \\ \dots + a^{n-4}\sqrt[n]{A^3} + a^{n-3}\sqrt[n]{A^2} + a^{n-2}\sqrt[n]{A} + a^{n-1} - (A - a^n)a' \end{array} \right\}}.$$

Der Nenner dieses Bruches muss rational gemacht werden. Man nenne zu dem Ende die Coefficienten der Wurzelgrössen derselben der Reihe nach mit  $E, F, G, H, \dots, R, S, T, U$  und den rationalen Theil desselben mit  $Z$ , desgleichen die Coefficienten

ten der Wurzelgrössen des zu suchenden Multipliers der Reihe nach mit  $e, f, g, h, \dots, r, s, t, u$ , und den rationalen Theil desselben mit  $z$ . Dann werden die Glieder des durch die Multiplication dieser beiden Reihen mit einander entstehenden Produktes, welches den neuen Nenner bildet, sich ordnen lassen, wie folgt:

Reihenfolge der Glieder		$\sqrt[n]{A^{n-1}}$	$\sqrt[n]{A^{n-2}}$	$\sqrt[n]{A^{n-3}}$	$\dots$	$\sqrt[n]{A^3}$	$\sqrt[n]{A^2}$	$\sqrt[n]{A}$	Rationaler Theil
Coefficienten $\left\{ \begin{array}{l} \text{im Nenner} \\ \text{derselben} \end{array} \right.$ im Multiplikator	$E$	$F$	$G$	$\dots$	$S$	$T$	$U$	$Z$	
	$e$	$f$	$g$	$\dots$	$s$	$t$	$u$	$z$	
Coefficienten der Glieder des	$eZ$	$AeE$	$AeF$	$\dots$	$AeR$	$AeS$	$AeT$	$AeU$	
	$fU$	$fZ$	$AfE$	$\dots$	$AfQ$	$AfR$	$AfS$	$AfT$	
	$gT$	$gU$	$gZ$	$\dots$	$AgP$	$AgQ$	$AgR$	$AgS$	
	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	
Produktes	$sH$	$sJ$	$sK$	$\dots$	$sZ$	$AsE$	$AsF$	$AsG$	
	$tG$	$tH$	$tJ$	$\dots$	$tU$	$tZ$	$AtE$	$AtF$	
	$uF$	$uG$	$uH$	$\dots$	$uT$	$uU$	$uZ$	$AuE$	
	$zE$	$zF$	$zG$	$\dots$	$zS$	$zT$	$zU$	$zZ$	

Nach diesem Schema werden auch alle folgenden Nenner rational gemacht.



# §. 2.

Im vorliegenden Falle (bei  $x''$ ) ist  $E=1$ ,  $F=a$ ,  $G=a^2, \dots, S=a^{n-4}$ ,  $T=a^{n-3}$ ,  $U=a^{n-2}$  und  $Z=a^{n-1}-(A-a^n)a'$ . Werden nun Zähler und Nenner des Bruches  $x''$  mit dem zu suchenden Multiplikator multipliziert, so werden die Coefficienten der Glieder des Nenners (nach obigem Schema) die folgenden sein:

$e[a^{n-1}-(A-a^n)a']eA$	$eAa$	$eAa^{n-6}$	$eAa^{n-4}$	$eAa^{n-3}$	$eAa^{n-2}$
$f a^{n-2}$	$fA$	$fAa^{n-6}$	$fAa^{n-6}$	$fAa^{n-4}$	$fAa^{n-3}$
$g a^{n-3}$	$g[a^{n-1}-(A-a^n)a']$	$gAa^{n-7}$	$gAa^{n-6}$	$gAa^{n-6}$	$gAa^{n-4}$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$s a^4$	$s a^6$	$s[a^{n-1}-(A-a^n)a']$	$sA$	$sAu$	$sAa^2$
$t a^3$	$t a^4$	$t a^{n-2}$	$t[a^{n-1}-(A-a^n)a']$	$tA$	$tAa$
$u a^2$	$u a^3$	$u a^{n-3}$	$u a^{n-2}$	$u[a^{n-1}-(A-a^n)a']$	$uA$
$z a$	$z a^2$	$z a^{n-4}$	$z a^{n-3}$	$z a^{n-2}$	$z[a^{n-1}-(A-a^n)a']$

$\sqrt{\phantom{x}}$  in einen Kettenbruch.



Nun bleibt noch  $z$  zu bestimmen.

Aus (I) haben wir:

$$z = -e[a^{n-1} - (A - a^n)a'] - fa^{n-2} - ga^{n-3} - \dots - sa^2 - ta^3 - ua.$$

Die Werthe für  $e, f, u. s. w.$  eingesetzt, gibt:

$$z = -[a^{n-1} - (A - a^n)a']a'^{n-2} - a^{n-2}a'^{n-3}(aa' + 1) - a^{n-3}a'^{n-4}(aa' + 1)^2 - \dots \\ \dots - a^2a'^2(aa' + 1)^{n-4} - a^2a'(aa' + 1)^{n-3} - a(aa' + 1)^{n-2},$$

$$z = (A - a^n)a'^{n-1} - a^{n-1}a'^{n-2} - a^{n-2}a'^{n-3}(aa' + 1) - a^{n-3}a'^{n-4}(aa' + 1)^2 - \dots \\ \dots - a^2a'^2(aa' + 1)^{n-4} - a^2a'(aa' + 1)^{n-3} - a(aa' + 1)^{n-2}.$$

Nun ist aber  $\left(\frac{aa' + 1}{aa'} - 1\right)aa' = 1$ , also:

$$z = (A - a^n)a'^{n-1} - [a^{n-1}a'^{n-2} + a^{n-2}a'^{n-3}(aa' + 1) + a^{n-3}a'^{n-4}(aa' + 1)^2 + \dots \\ \dots + a^2a'^2(aa' + 1)^{n-4} + a^2a'(aa' + 1)^{n-3} + a(aa' + 1)^{n-2}]. \left(\frac{aa' + 1}{aa'} - 1\right)aa',$$

$$z = (A - a^n)a'^{n-1} - \left[\frac{(aa' + 1)^{n-1}}{a'} - a^{n-1}a'^{n-2}\right]aa'$$

$$= Aa'^{n-1} - a^n a'^{n-1} - a(aa' + 1)^{n-1} + a^n a'^{n-1}$$

$$= Aa'^{n-1} - a(aa' + 1)^{n-1}.$$

Zähler und Nenner des Bruches  $x''$  müssen also multipliziert werden mit

$$a'^{n-2}\sqrt[n]{A^{n-1}} + a'^{n-3}(aa' + 1)\sqrt[n]{A^{n-2}} + a'^{n-4}(aa' + 1)^2\sqrt[n]{A^{n-3}} + \dots \\ \dots + a^2(aa' + 1)^{n-4}\sqrt[n]{A^3} + a'(aa' + 1)^{n-3}\sqrt[n]{A^2} + (aa' + 1)^{n-2}\sqrt[n]{A} \\ + Aa'^{n-1} - a(aa' + 1)^{n-1}.$$

Der Zähler ist dann diese Reihe, multipliziert mit  $A - a^n$ . Was den Nenner betrifft, so reducirt sich derselbe auf die letzte der oben aufgestellten senkrechten Reihen, da alle übrigen  $= 0$  geworden sind. Diese Reihe ist aber:

$$Aa^{n-2}e + Aa^{n-3}f + Aa^{n-4}g + \dots + Aa^2s + Aat + Au + z[a^{n-1} - (A - a^n)a'] \\ = Aa^{n-2}a'^{n-2} + Aa^{n-3}a'^{n-3}(aa' + 1) + Aa^{n-4}a'^{n-4}(aa' + 1)^2 + \dots \\ \dots + Aa^2a'^2(aa' + 1)^{n-4} + Aaa'(aa' + 1)^{n-3} \\ + A(aa' + 1)^{n-2} + [Aa'^{n-1} - a(aa' + 1)^{n-1}] \cdot [a^{n-1} - (A - a^n)a'].$$

Dies wieder mit  $\left(\frac{aa' + 1}{aa'} - 1\right)aa'$  multipliziert (das letzte Glied ausgenommen), gibt:

$$\begin{aligned}
 & \left[ \frac{A(aa' + 1)^{n-1}}{aa'} - Aa^{n-2}a'^{n-2} \right] aa' \\
 & + [Aa'^{n-1} - a(aa' + 1)^{n-1}] \cdot [a^{n-1} - (A - a^n)a'] \\
 = & A(aa' + 1)^{n-1} - Aa^{n-1}a'^{n-1} + Aa^{n-1}a'^{n-1} - a^n(aa' + 1)^{n-1} \\
 & - (A - a^n) \cdot (Aa'^n - aa'(aa' + 1)^{n-1}) \\
 = & A(aa' + 1)^{n-1} - a^n(aa' + 1)^{n-1} - (A - a^n) \cdot [Aa'^n - aa'(aa' + 1)^{n-1}] \\
 = & (A - a^n) \cdot [(aa' + 1)^{n-1} - Aa'^n + aa'(aa' + 1)^{n-1}] \\
 = & (A - a^n) \cdot [(aa' + 1)^n - Aa'^n].
 \end{aligned}$$

Folglich ist, wenn man noch Zähler und Nenner des Bruches  $x''$  durch  $A - a^n$  dividirt,

$$\begin{aligned}
 x'' = & \frac{\left\{ \begin{aligned} & a'^{n-2} \sqrt[n]{A^{n-1}} + a'^{n-3}(aa' + 1) \sqrt[n]{A^{n-2}} + a'^{n-4}(aa' + 1)^2 \sqrt[n]{A^{n-3}} + \dots \\ & \dots + a'^2(aa' + 1)^{n-4} \sqrt[n]{A^3} + a'(aa' + 1)^{n-3} \sqrt[n]{A^2} + (aa' + 1)^{n-2} \sqrt[n]{A} \\ & + Aa'^{n-1} - a(aa' + 1)^{n-1} \end{aligned} \right\}}{(aa' + 1)^n - Aa'^n} \\
 = & a'' + \frac{1}{x'''} ,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x''' = & \frac{(aa' + 1)^n - Aa'^n}{\left\{ \begin{aligned} & a'^{n-2} \sqrt[n]{A^{n-1}} + a'^{n-3}(aa' + 1) \sqrt[n]{A^{n-2}} + a'^{n-4}(aa' + 1)^2 \sqrt[n]{A^{n-3}} \\ & + \dots + a'^2(aa' + 1)^{n-4} \sqrt[n]{A^3} + a'(aa' + 1)^{n-3} \sqrt[n]{A^2} \\ & + (aa' + 1)^{n-2} \sqrt[n]{A} + Aa'^{n-1} - a(aa' + 1)^{n-1} \\ & - a''[(aa' + 1)^n - Aa'^n] \end{aligned} \right\}} .
 \end{aligned}$$

Der Nenner dieses Bruches wird rational gemacht auf dieselbe Weise wie bei  $x''$ . Wir haben hier:

$$\begin{aligned}
 E &= a'^{n-2}, \quad F = a'^{n-3}(aa' + 1), \quad G = a'^{n-4}(aa' + 1)^2, \dots, \\
 S &= a'^2(aa' + 1)^{n-4}, \quad T = a'(aa' + 1)^{n-3}, \quad U = (aa' + 1)^{n-2}, \\
 Z &= Aa'^{n-1} - a(aa' + 1)^{n-1} - a''[(aa' + 1)^n - Aa'^n].
 \end{aligned}$$

Zu suchen sind wieder die Werthe für  $e, f, g, \dots, s, t, u, z$ .

Nach dem Schema in §. 1. haben wir die Gleichungen:

(I)

$$e \{ Aa'^{n-1} - a(aa' + 1)^{n-1} - a''[(aa' + 1)^n - Aa'^n] \} \\ + f(aa' + 1)^{n-2} + ga'(aa' + 1)^{n-3} + \dots \\ \dots + sa'^{n-5}(aa' + 1)^3 + ta'^{n-4}(aa' + 1)^2 + ua'^{n-3}(aa' + 1) + za'^{n-2} = 0,$$

(II)

$$eAa'^{n-2} + f \{ Aa'^{n-1} - a(aa' + 1)^{n-1} - a''[(aa' + 1)^n - Aa'^n] \} \\ + g(aa' + 1)^{n-3} + \dots + sa'^{n-6}(aa' + 1)^4 + ta'^{n-5}(aa' + 1)^3 \\ + ua'^{n-4}(aa' + 1)^2 + za'^{n-3}(aa' + 1) = 0,$$

(III)

$$eAa'^{n-3}(aa' + 1) + fAa'^{n-2} \\ + g \{ Aa'^{n-1} - a(aa' + 1)^{n-1} - a''[(aa' + 1)^n - Aa'^n] \} + \dots \\ \dots + sa'^{n-7}(aa' + 1)^5 + ta'^{n-6}(aa' + 1)^4 + ua'^{n-5}(aa' + 1)^3 \\ + za'^{n-4}(aa' + 1)^2 = 0,$$

.....  
.....

(IV)

$$eAa'^3(aa' + 1)^{n-5} + fAa'^4(aa' + 1)^{n-6} + gAa'^5(aa' + 1)^{n-7} + \dots \\ \dots + s \{ Aa'^{n-1} - a(aa' + 1)^{n-1} - a''[(aa' + 1)^n - Aa'^n] \} \\ + t(aa' + 1)^{n-2} + ua'(aa' + 1)^{n-3} + za'^2(aa' + 1)^{n-4} = 0,$$

(V)

$$eAa'^2(aa' + 1)^{n-4} + fAa'^3(aa' + 1)^{n-5} + gAa'^4(aa' + 1)^{n-6} + \dots \\ \dots + sAa'^{n-2} + t \{ Aa'^{n-1} - a(aa' + 1)^{n-1} - a''[(aa' + 1)^n - Aa'^n] \} \\ + u(aa' + 1)^{n-3} + za'(aa' + 1)^{n-4} = 0,$$

(VI)

$$eAa'(aa' + 1)^{n-3} + fAa'^2(aa' + 1)^{n-4} + gAa'^3(aa' + 1)^{n-5} + \dots \\ \dots + sAa'^{n-3}(aa' + 1) + tAa'^{n-2} \\ + u \{ Aa'^{n-1} - a(aa' + 1)^{n-1} - a''[(aa' + 1)^n - Aa'^n] \} + z(aa' + 1)^{n-2} = 0.$$

Aus diesen Gleichungen bilden wir durch Multiplication und Subtraction (nämlich  $a'II - (aa' + 1)I$ ,  $a'III - (aa' + 1)II$ , ...,  $a'V - (aa' + 1)IV$ ,  $a'VI - (aa' + 1)V$ ) die folgenden:

(VII)

$$e[AA'^{n-1} - AA'^{n-1}(aa' + 1) + a(aa' + 1)^n + a''(aa' + 1)^{n+1} - AA'^n(aa' + 1)a''] \\ - f[(aa' + 1)^{n-1} - AA'^n + aa'(aa' + 1)^{n-1} + a'a''(aa' + 1)^n - AA'^{n+1}a''] \\ = 0,$$

$$e[-AAa'^n - AA'^na''(aa' + 1) + a(aa' + 1)^n + a''(aa' + 1)^{n+1}] \\ - f[-AA'^n - AA'^{n+1}a' + (aa' + 1)^n + a'a''(aa' + 1)^n] = 0,$$

$$e\{[(aa' + 1)a'' + a] \cdot [(aa' + 1)^n - AA'^n]\} - f\{(a'a'' + 1) \cdot [(aa' + 1)^n - AA'^n]\} \\ = 0,$$

$$e[(aa' + 1)a'' + a] = f(a'a'' + 1).$$

Ebenso findet man:

$$f[(aa' + 1)a'' + a] = g(a'a'' + 1), \dots, s[(aa' + 1)a'' + a] = t(a'a'' + 1), \\ t[(aa' + 1)a'' + a] = u(a'a'' + 1).$$

Die Grössen  $e, f, g, \dots, s, t, u$  bilden also wieder eine geometrische Progression, deren Exponent  $= \frac{(aa' + 1)a'' + a}{a'a'' + 1}$ . Wir setzen also  $e = (a'a'' + 1)^{n-2}$ . Dann ist:

$$f = (a'a'' + 1)^{n-3}[(aa' + 1)a'' + a],$$

$$g = (a'a'' + 1)^{n-4}[(aa' + 1)a'' + a]^2, \dots, s = (a'a'' + 1)^2[(aa' + 1)a'' + a]^{n-4},$$

$$t = (a'a'' + 1)[(aa' + 1)a'' + a]^{n-3}, \quad u = [(aa' + 1)a'' + a]^{n-2}.$$

Aus (I) haben wir ferner:

$$za'^{n-2} = -e\{AA'^{n-1} - a(aa' + 1)^{n-1} - a''[(aa' + 1)^n - AA'^n]\} - f(aa' + 1)^{n-2} \\ - ga'(aa' + 1)^{n-3} - \dots - sa'^{n-5}(aa' + 1)^3 - ta'^{n-4}(aa' + 1)^2 \\ - ua'^{n-3}(aa' + 1).$$

$$za'^{n-2} = -(a'a'' + 1)^{n-2}\{AA'^{n-1} - a(aa' + 1)^{n-1} - a''[(aa' + 1)^n - AA'^n]\} \\ - (aa' + 1)^{n-2}(a'a'' + 1)^{n-3}[(aa' + 1)a'' + a] \\ - a'(aa' + 1)^{n-3}(a'a'' + 1)^{n-4}[(aa' + 1)a'' + a]^2 - \dots \\ \dots - a'^{n-5}(aa' + 1)^3(a'a'' + 1)^2[(aa' + 1)a'' + a]^{n-4} \\ - a'^{n-4}(aa' + 1)^2(a'a'' + 1)[(aa' + 1)a'' + a]^{n-3} \\ - a'^{n-3}(aa' + 1)[(aa' + 1)a'' + a]^{n-2}.$$

Es ist aber:

$$\left\{ \frac{a'[(aa' + 1)a'' + a]}{(aa' + 1)(a'a'' + 1)} - 1 \right\} \cdot [-(aa' + 1)(a'a'' + 1)] = 1,$$

folglich :

$$\begin{aligned} x^{n-2} = & -(a'a'' + 1)^{n-2} \{ Aa'^{n-1} - a(aa' + 1)^{n-1} - a''[(aa' + 1)^n - Aa'^n] \} \\ & - \left\{ \begin{aligned} & (aa' + 1)^{n-2}(a'a'' + 1)^{n-3}[(aa' + 1)a'' + a] \\ & + a'(aa' + 1)^{n-3}(a'a'' + 1)^{n-4}[(aa' + 1)a'' + a]^2 + \dots \\ & \dots + a'^{n-5}(aa' + 1)^3(a'a'' + 1)^3[(aa' + 1)a'' + a]^{n-4} \\ & + a'^{n-4}(aa' + 1)^2(a'a'' + 1)[(aa' + 1)a'' + a]^{n-3} \\ & + a'^{n-3}(aa' + 1)[(aa' + 1)a'' + a]^{n-2} \end{aligned} \right\} \\ & \times \left\{ \frac{a'[(aa' + 1)a'' + a]}{(aa' + 1)(a'a'' + 1)} - 1 \right\} \cdot [-(aa' + 1)(a'a'' + 1)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^{n-2} = & -(a'a'' + 1)^{n-2} \{ Aa'^{n-1} - a(aa' + 1)^{n-1} - a''[(aa' + 1)^n - Aa'^n] \} \\ & + \left\{ \frac{a'^{n-2}[(aa' + 1)a'' + a]^{n-1}}{a'a'' + 1} \right. \\ & \left. - (aa' + 1)^{n-2}(a'a'' + 1)^{n-3}[(aa' + 1)a'' + a] \right\} (aa' + 1)(a'a'' + 1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^{n-2} = & -(a'a'' + 1)^{n-2} \{ Aa'^{n-1} - a(aa' + 1)^{n-1} - a''[(aa' + 1)^n - Aa'^n] \} \\ & + a'^{n-2}(aa' + 1)[(aa' + 1)a'' + a]^{n-1} \\ & - (aa' + 1)^{n-1}(a'a'' + 1)^{n-2}[(aa' + 1)a'' + a], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^{n-2} = & -Aa'^{n-1}(a'a'' + 1)^{n-2} - Aa'^na''(a'a'' + 1)^{n-2} \\ & + a(aa' + 1)^{n-1}(a'a'' + 1)^{n-2} + a''(aa' + 1)^n(a'a'' + 1)^{n-2} \\ & + a'^{n-2}(aa' + 1)[(aa' + 1)a'' + a]^{n-1} \\ & - a''(aa' + 1)^n(a'a'' + 1)^{n-2} - a(aa' + 1)^{n-1}(a'a'' + 1)^{n-2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^{n-2} = & -Aa'^{n-1}(a'a'' + 1)^{n-2} - Aa'^na''(a'a'' + 1)^{n-2} \\ & + a'^{n-2}(aa' + 1)[(aa' + 1)a'' + a]^{n-1}, \end{aligned}$$

$$x = -Aa'(a'a'' + 1)^{n-2} - Aa'^2a''(a'a'' + 1)^{n-2} + (aa' + 1)[(aa' + 1)a'' + a]^{n-1},$$

$$\begin{aligned} x = & -A(a'^2a'' + a')(a'a'' + 1)^{n-2} + (aa' + 1)[(aa' + 1)a'' + a]^{n-1} \\ = & -Aa'(a'a'' + 1)^{n-1} + (aa' + 1)[(aa' + 1)a'' + a]^{n-1}. \end{aligned}$$

Zähler und Nenner des Bruches  $x'''$  müssen also multipliziert werden mit

$$\begin{aligned}
& (a'a'' + 1)^{n-2} \sqrt[n]{A^{n-1}} + (a'a'' + 1)^{n-3} [(aa' + 1)a'' + a] \sqrt[n]{A^{n-2}} \\
& + (a'a'' + 1)^{n-4} [(aa' + 1)a'' + a]^2 \sqrt[n]{A^{n-3}} + \dots \\
& \dots + (a'a'' + 1)^2 [(aa' + 1)a'' + a]^{n-4} \sqrt[n]{A^3} + (a'a'' + 1) [(aa' + 1)a'' + a]^{n-3} \sqrt[n]{A^2} \\
& + [(aa' + 1)a'' + a]^{n-2} \sqrt[n]{A} + (aa' + 1) [(aa' + 1)a'' + a]^{n-1} - Aa'(a'a'' + 1)^{n-1}.
\end{aligned}$$

Dann ist der Zähler diese Reihe, multipliziert mit  $(aa' + 1)^n - Aa'^n$ . Der Nenner aber wird gebildet nach der letzten senkrechten Reihe des Schema's in §. 1. Diese Reihe ist:

$$\begin{aligned}
& AeU + AfT + AgS + \dots + AsG + AtF + AuE + zZ \\
& = A(aa' + 1)^{n-2}(a'a'' + 1)^{n-2} + Aa'(aa' + 1)^{n-3}(a'a'' + 1)^{n-3} [(aa' + 1)a'' + a] \\
& + Aa'^2(aa' + 1)^{n-4}(a'a'' + 1)^{n-4} [(aa' + 1)a'' + a]^2 + \dots \\
& \dots + Aa'^{n-4}(aa' + 1)^2(a'a'' + 1)^2 [(aa' + 1)a'' + a]^{n-4} \\
& + Aa'^{n-3}(aa' + 1)(a'a'' + 1) [(aa' + 1)a'' + a]^{n-3} + Aa'^{n-2} [(aa' + 1)a'' + a]^{n-2} \\
& + \{ Aa'^{n-1} - a(aa' + 1)^{n-1} - a'' [(aa' + 1)^n - Aa'^n] \} \\
& \times \{ (aa' + 1) [(aa' + 1)a'' + a]^{n-1} - Aa'(a'a'' + 1)^{n-1} \}.
\end{aligned}$$

Dies, mit Ausnahme des letzten Gliedes, wieder multipliziert mit

$$\left\{ \frac{a' [(aa' + 1)a'' + a]}{(aa' + 1)(a'a'' + 1)} - 1 \right\} \cdot [-(aa' + 1)(a'a'' + 1)]$$

gibt:

$$\begin{aligned}
& - \left\{ \frac{Aa'^{n-1} [(aa' + 1)a'' + a]^{n-1}}{(aa' + 1)(a'a'' + 1)} \right. \\
& \quad \left. - A(aa' + 1)^{n-2}(a'a'' + 1)^{n-2} \right\} (aa' + 1)(a'a'' + 1) \\
& + Aa'^{n-1}(aa' + 1) [(aa' + 1)a'' + a]^{n-1} - A^2 a'^n (a'a'' + 1)^{n-1} \\
& - a(aa' + 1)^n [(aa' + 1)a'' + a]^{n-1} + Aaa'(aa' + 1)^{n-1} (a'a'' + 1)^{n-1} \\
& - a''(aa' + 1)^{n+1} [(aa' + 1)a'' + a]^{n-1} + Aa'a''(aa' + 1)^n (a'a'' + 1)^{n-1} \\
& + Aa'^n a''(aa' + 1) [(aa' + 1)a'' + a]^{n-1} - A^2 a'^{n+1} a'' (a'a'' + 1)^{n-1} \\
& = -A^2 [a'^{n+1} a'' (a'a'' + 1)^{n-1} + a'^n (a'a'' + 1)^{n-1}] \\
& + A \left\{ \begin{aligned} & a'^{n-1}(aa' + 1) [(aa' + 1)a'' + a]^{n-1} - a'^{n-1} [(aa' + 1)a'' + a]^{n-1} \\ & + a'^n a''(aa' + 1) [(aa' + 1)a'' + a]^{n-1} + aa'(aa' + 1)^{n-1} (a'a'' + 1)^{n-1} \\ & + (aa' + 1)^{n-1} (a'a'' + 1)^{n-1} + a'a''(aa' + 1)^n (a'a'' + 1)^{n-1} \end{aligned} \right\} \\
& - a''(aa' + 1)^{n+1} [(aa' + 1)a'' + a]^{n-1} - a(aa' + 1)^n [(aa' + 1)a'' + a]^{n-1} =
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= -A^2 a' a'' (a' a'' + 1)^n + A \{ a a' a'' [(a a' + 1) a'' + a]^{n-1} \\
 &\quad + a' a'' (a a' + 1) [(a a' + 1) a'' + a]^{n-1} \\
 &\quad + (a a' + 1)^n (a' a'' + 1)^{n-1} + a' a'' (a a' + 1)^n (a' a'' + 1)^{n-1} \} \\
 &\quad - [(a a' + 1) a'' + a] \cdot (a a' + 1)^n [(a a' + 1) a'' + a]^{n-1} \\
 &= -A^2 a' a'' (a' a'' + 1)^n + A \{ a' a'' [(a a' + 1) a'' + a]^n + (a a' + 1)^n (a' a'' + 1)^n \} \\
 &\quad - (a a' + 1)^n [(a a' + 1) a'' + a]^n \\
 &= [(a a' + 1)^n - A a' a''] \cdot \{ - [(a a' + 1) a'' + a]^n + A (a' a'' + 1)^n \}.
 \end{aligned}$$

Werden nun noch Zähler und Nenner von  $x'''$  durch  $(a a' + 1)^n - A a' a''$  dividirt, so ist:

$$x''' = \frac{
 \left\{
 \begin{aligned}
 &(a' a'' + 1)^{n-2} \sqrt[n]{A^{n-1}} + (a' a'' + 1)^{n-3} [(a a' + 1) a'' + a] \sqrt[n]{A^{n-2}} \\
 &\quad + (a' a'' + 1)^{n-4} [(a a' + 1) a'' + a]^2 \sqrt[n]{A^{n-3}} + \dots \\
 &\quad \dots + (a' a'' + 1)^2 [(a a' + 1) a'' + a]^{n-4} \sqrt[n]{A^3} \\
 &\quad + (a' a'' + 1) [(a a' + 1) a'' + a]^{n-3} \sqrt[n]{A^2} + [(a a' + 1) a'' + a]^{n-2} \sqrt[n]{A} \\
 &\quad + (a a' + 1) [(a a' + 1) a'' + a]^{n-1} - A a' (a' a'' + 1)^{n-1}
 \end{aligned}
 \right\}
 }{
 \begin{aligned}
 &- [(a a' + 1) a'' + a]^n + A (a' a'' + 1)^n
 \end{aligned}
 }.$$

### §. 3.

So weit die Berechnung im vorigen Paragraphen reicht, heissen die Kettenbruchsnenner

$$a, \quad a', \quad a'',$$

also die Näherungsbrüche:

$$\frac{1}{0}, \quad \frac{a}{1}, \quad \frac{a a' + 1}{a'}, \quad \frac{(a a' + 1) a'' + a}{a' a'' + 1}.$$

Aus der Vergleichung der gefundenen vollständigen Quotienten ( $x', x'', x'''$ ) mit diesen entsprechenden Näherungswerthen ergibt sich folgendes Gesetz:

Zieht man mittelst der Kettenbrüche die  $n$ te Wurzel aus der Irrationalzahl  $A$ , ist die grösste in  $\sqrt[n]{A}$  enthaltene ganze Zahl  $= a$ , also  $\frac{a}{1}$  der erste Näherungsbruch, sind ferner  $\frac{p^0}{q^0}$  und

$\frac{p}{q}$  zwei aufeinander folgende Näherungswerthe für  $\sqrt[n]{A}$ , so ist der zu  $\frac{p}{q}$  gehörige vollständige Quotient

$$\left\{ \begin{array}{l} q^{n-2} \sqrt[n]{A^{n-1}} + q^{n-3} p \sqrt[n]{A^{n-2}} + q^{n-4} p^2 \sqrt[n]{A^{n-3}} + \dots \\ \dots + q^2 p^{n-4} \sqrt[n]{A^3} + q p^{n-3} \sqrt[n]{A^2} + p^{n-2} \sqrt[n]{A} \pm (p_0 p^{n-1} - q_0 q^{n-1} A) \end{array} \right\} \\ \mp (p^n - q^n A)$$

wobei die oberen Zeichen für die Näherungsbrüche ungerader Ordnung und die unteren für die Näherungsbrüche gerader Ordnung gelten.

Die Richtigkeit dieses Satzes in Beziehung auf die drei ersten vollständigen Quotienten geht aus der Berechnung in §. 1. und §. 2. hervor. Soll die allgemeine Gültigkeit desselben bewiesen werden, so ist noch darzuthun, dass, wenn derselbe für irgend einen vollständigen Quotienten gilt, dies auch für den nächstfolgenden der Fall ist; mit andern Worten: dass, wenn  $\frac{p_0}{q_0}$ ,  $\frac{p}{q}$ ,  $\frac{p'}{q'}$  drei auf einander folgende Näherungswerthe für  $\sqrt[n]{A}$  sind, und wenn der zu  $\frac{p}{q}$  gehörige vollständige Quotient

$$x^{(n)} = \frac{\left\{ \begin{array}{l} q^{n-2} \sqrt[n]{A^{n-1}} + q^{n-3} p \sqrt[n]{A^{n-2}} + q^{n-4} p^2 \sqrt[n]{A^{n-3}} + \dots \\ \dots + q^2 p^{n-4} \sqrt[n]{A^3} + q p^{n-3} \sqrt[n]{A^2} + p^{n-2} \sqrt[n]{A} \pm (p_0 p^{n-1} - q_0 q^{n-1} A) \end{array} \right\}}{\mp (p^n - q^n A)},$$

alsdann der folgende, zu  $\frac{p'}{q'}$  gehörige vollständige Quotient:

$$x^{(n+1)} = \frac{\left\{ \begin{array}{l} q'^{n-2} \sqrt[n]{A^{n-1}} + q'^{n-3} p' \sqrt[n]{A^{n-2}} + q'^{n-4} p'^2 \sqrt[n]{A^{n-3}} + \dots \\ \dots + q'^2 p'^{n-4} \sqrt[n]{A^3} + q' p'^{n-3} \sqrt[n]{A^2} + p'^{n-2} \sqrt[n]{A} \mp (p p'^{n-1} - q q'^{n-1} A) \end{array} \right\}}{\pm (p'^n - q'^n A)}$$

ist.

#### §. 4.

Setzen wir einstweilen, ähnlich wie oben,

$$x^{(n+1)} = \frac{e\sqrt[n]{A^{n-1}} + f\sqrt[n]{A^{n-2}} + g\sqrt[n]{A^{n-3}} + \dots + s\sqrt[n]{A^3} + t\sqrt[n]{A^2} + u\sqrt[n]{A} + z}{D},$$

o ist zu beweisen, dass

$$\begin{aligned} \text{I. } e &= q'^{n-2}, \quad f = q'^{n-3}p', \quad g = q'^{n-4}p'^2, \dots, \quad s = q'^2p'^{n-4}, \\ &\quad t = q'p'^{n-3}, \quad u = p'^{n-2}, \\ \text{II. } z &= \mp (pp'^{n-1} - qq'^{n-1}A), \\ \text{III. } D &= \pm (p'^n - q'^nA). \end{aligned}$$

# I.

Die grösste in  $x^{(n)}$  steckende ganze Zahl sei  $=m$ . Dann ist  $p' = mp + p^0$ ,  $q' = mq + q^0$ , ferner:

$$\begin{aligned} &x^{(n+1)} \\ &= \frac{\mp (p^n - q^nA)}{\left\{ \begin{aligned} &q^{n-2}\sqrt[n]{A^{n-1}} + q^{n-3}p\sqrt[n]{A^{n-2}} + q^{n-4}p^2\sqrt[n]{A^{n-3}} + \dots \\ &\dots + q^2p^{n-2}\sqrt[n]{A^3} + qp^{n-3}\sqrt[n]{A^2} + p^{n-2}\sqrt[n]{A} \pm (p^0p^{n-1} - q^0q^{n-1}A) \end{aligned} \right\} \\ &\quad \pm m(p^n - q^nA) \end{aligned}$$

Hier ist also:

$$\begin{aligned} E &= q^{n-2}, \quad F = q^{n-3}p, \quad G = q^{n-4}p^2, \dots, \quad S = q^2p^{n-4}, \\ T &= qp^{n-3}, \quad U = p^{n-2}, \quad Z = \pm (p_0p^{n-1} - q_0q^{n-1}A) \pm m(p^n - q^nA). \end{aligned}$$

Also haben wir nach dem Schema in §. 1.:

# (I)

$$\begin{aligned} &\pm e(p^0p^{n-1} - q^0q^{n-1}A) \pm em(p^n - q^nA) + fp^{n-2} + gqp^{n-3} + \dots \\ &\quad \dots + sq^{n-5}p^3 + tq^{n-4}p^2 + uq^{n-3}p + zq^{n-2} = 0, \end{aligned}$$

# (II)

$$\begin{aligned} &e\Delta q^{n-2} \pm f(p^0p^{n-1} - q^0q^{n-1}A) \pm fm(p^n - q^nA) + gp^{n-2} + \dots \\ &\quad \dots + sq^{n-6}p^4 + tq^{n-5}p^3 + uq^{n-4}p^2 + zq^{n-3}p = 0, \end{aligned}$$

# (III)

$$\begin{aligned} &e\Delta q^{n-3}p + f\Delta q^{n-2} \pm g(p^0p^{n-1} - q^0q^{n-1}A) \pm gm(p^n - q^nA) + \dots \\ &\quad \dots + sq^{n-7}p^5 + tq^{n-6}p^4 + uq^{n-5}p^3 + zq^{n-4}p^2 = 0, \end{aligned}$$

.....  
.....

(IV)

$$eAq^3p^{n-5} + fAq^4p^{n-6} + gAq^5p^{n-7} + \dots \pm s(p^0p^{n-1} - q^0q^{n-1}A) \\ \pm sm(p^n - q^nA) + tp^{n-2} + uqp^{n-3} + zq^2p^{n-4} = 0,$$

(V)

$$eAq^2p^{n-4} + fAq^3p^{n-5} + gAq^4p^{n-6} + \dots + sAq^{n-2} \\ \pm t(p^0p^{n-1} - q^0q^{n-1}A) \pm tm(p^n - q^nA) + up^{n-2} + zqp^{n-3} = 0,$$

(VI)

$$eAqp^{n-3} + fAq^2p^{n-4} + gAq^3p^{n-5} + \dots + sAq^{n-3}p + tAq^{n-2} \\ \pm u(p^0p^{n-1} - q^0q^{n-1}A) \pm um(p^n - q^nA) + zp^{n-2} = 0.$$

Aus diesen Gleichungen bilden wir durch Multiplication und Subtraction (nämlich  $qII - pI$ ,  $qIII - pII$ , ....  $qV - pIV$ ,  $qVI - pV$ ) die folgenden:

(VII)

$$e[Aq^{n-1} \mp p(p^0p^{n-1} - q^0q^{n-1}A) \mp mp(p^n - q^nA)] \\ - f[p^{n-1} \mp q(p^0p^{n-1} - q^0q^{n-1}A) \mp mq(p^n - q^nA)] = 0,$$

$$e[Aq^{n-1} \mp p^n(mp + p^0) \pm pq^0q^{n-1}A \pm mpq^nA] \\ = f[p^{n-1} \mp p^0p^{n-1}q \mp mp^nq \pm q^n(mq + q^0)A],$$

$$e[Aq^{n-1} \mp p^n(mp + p^0) \pm pq^{n-1}A(mq + q^0)] \\ = f[p^{n-1} \mp p^{n-1}q(mp + p^0) \pm q^nA(mq + q^0)],$$

(VIII)

$$e[Aq^{n-1} \mp p^np' \pm pq^{n-1}q'A] = f[p^{n-1} \mp p^{n-1}p'q \pm q^nq'A].$$

Nach Egen's Handbuch der allgemeinen Arithmetik Theil I. §. 269. ist im vorliegenden Falle

$$p'q - pq' = \pm 1, \text{ also } \pm p'q \mp pq' = 1,$$

ferner

$$\pm p'q = \pm pq' + 1 \text{ und } \mp pq' = \mp p'q + 1.$$

Demnach verwandelt sich die Gleichung (VIII) in folgende:

$$e(\pm p'q^nA \mp p^np') = f(\pm q^nq'A \mp p^nq'),$$

$$ep' = fq'.$$

Ebenso findet man, dass  $fp' = gq'$ , ....,  $sp' = tq'$ ,  $tp' = uq'$ . Die Grössen  $e$  bis  $u$  bilden also wieder eine geometrische Progression, deren Exponent  $= \frac{p'}{q'}$ . Demnach setzen wir  $e = q'^{n-2}$ , dann ist

$$f = q'^{n-3}p', \quad g = q'^{n-4}p'^2, \quad \dots, \quad s = q'^2p'^{n-4}, \quad t = q'p'^{n-3}, \quad u = p'^{n-2}.$$

## II.

Aus (I) haben wir:

$$:q^{n-2} = \mp e(p^0p^{n-1} - q^0q^{n-1}A) \mp em(p^n - q^nA) - fp^{n-2} - gqp^{n-3} - \dots \\ \dots - sq^{n-5}p^3 - tq^{n-4}p^2 - uq^{n-3}p.$$

$$:q^{n-2} = \mp q'^{n-2}(p^0p^{n-1} - q^0q^{n-1}A) \mp q'^{n-2}m(p^n - q^nA) \\ - q'^{n-3}p'p^{n-2} - q'^{n-4}p'^2qp^{n-3} - \dots \\ \dots - q'^2p'^{n-4}q^{n-5}p^3 - q'p'^{n-3}q^{n-4}p^2 - p'^{n-2}q^{n-3}p.$$

Nun ist  $\left(\frac{p'q}{pq'} - 1\right) \cdot (\pm pq') = 1$ , folglich:

$$:q^{n-2} = \mp q'^{n-2}(p^0p^{n-1} - q^0q^{n-1}A) \mp q'^{n-2}m(p^n - q^nA) \\ - (q'^{n-3}p'p^{n-2} + q'^{n-4}p'^2qp^{n-3} + \dots \\ \dots + q'^2p'^{n-4}q^{n-5}p^3 + q'p'^{n-3}q^{n-4}p^2 + p'^{n-2}q^{n-3}p) \\ \times \left(\frac{p'q}{pq'} - 1\right) \cdot (\pm pq'),$$

$$:q^{n-2} = \mp q'^{n-2}p^0p^{n-1} \pm q'^{n-2}q^0q^{n-1}A \mp q'^{n-2}mp^n \\ \pm q'^{n-2}mq^nA \pm q'^{n-2}p'p^{n-1} \mp p'^{n-1}q^{n-2}p,$$

$$:q^{n-2} = \mp q'^{n-2}p^{n-1}(mp + p^0) \pm q'^{n-2}q^{n-1}A(mq + q^0) \\ \pm q'^{n-2}p'p^{n-1} \mp p'^{n-1}q^{n-2}p,$$

$$:q^{n-2} = \mp q'^{n-2}p^{n-1}p' \pm q'^{n-1}q^{n-1}A \pm q'^{n-2}p'p^{n-1} \mp p'^{n-1}q^{n-2}p \\ = \mp p'^{n-1}q^{n-2}p \pm q'^{n-1}q^{n-1}A,$$

$$z = \mp pp'^{n-1} \pm qq'^{n-1}A = \mp (pp'^{n-1} - qq'^{n-1}A).$$

## III.

Da der Werth für  $x^{(n+1)}$  sich schliesslich durch  $\mp(p^n - q^nA)$  muss aufheben lassen, so setzen wir die letzte senkrechte Reihe des Schemas in §. I.  $= \mp(p^n - q^nA)D$ . Also:

$$\mp(p^n - q^nA)D = AeU + AfT + AgS + \dots + AsG + AtF + AuE + zZ,$$

$$\mp(p^n - q^nA)D = q'^{n-2}p^{n-2}A + q'^{n-3}p'qp^{n-3}A + q'^{n-4}p'^2q^2p^{n-4}A + \dots \\ \dots + q'^2p'^{n-4}q^{n-4}p^2A + q'p'^{n-3}q^{n-3}pA \\ + p'^{n-2}q^{n-2}A$$

$$\mp(pp'^{n-1} - qq'^{n-1}A) \cdot [\pm(p^0p^{n-1} - q^0q^{n-1}A) \pm m(p^n - q^nA)].$$

Dies, mit Ausnahme des letzten Gliedes, wieder mit

$$\left(\frac{p'q}{pq'} - 1\right) \cdot (\pm pq')$$

multipliziert, gibt:

$$\mp (p^n - q^n A) D = \mp q'^{n-1} p^{n-1} A \pm p'^{n-1} q^{n-1} A \\ - p^0 p^n p'^{n-1} + p p'^{n-1} q^0 q^{n-1} A - m p^{n+1} p'^{n-1} + m p p'^{n-1} q^n A \\ + p^0 p^{n-1} q q'^{n-1} A - q^0 q^n q'^{n-1} A^2 + m p^n q q'^{n-1} A - m q^{n+1} q'^{n-1} A^2,$$

$$\mp (p^n - q^n A) D = \mp p^{n-1} q'^{n-1} A \pm p'^{n-1} q^{n-1} A - p^n p'^{n-1} (m p + p^0) \\ - q^n q'^{n-1} A^2 (m q + q^0) + p p'^{n-1} q^{n-1} A (m q + q^0) \\ + p^{n-1} q q'^{n-1} A (m p + p^0),$$

$$\mp (p^n - q^n A) D = \mp p^{n-1} q'^{n-1} A \pm p'^{n-1} q^{n-1} A - p^n p'^n - q^n q'^n A^2 \\ + p p'^{n-1} q^{n-1} q' A + p^{n-1} p' q q'^{n-1} A,$$

$$(p^n - q^n A) D = p^{n-1} q'^{n-1} A - p'^{n-1} q^{n-1} A \pm p^n p'^n \pm q^n q'^n A^2 \\ \mp p p'^{n-1} q^{n-1} q' A \mp p^{n-1} p' q q'^{n-1} A,$$

$$(p^n - q^n A) D = \pm p^n p'^n + (1 \mp p'q) p^{n-1} q'^{n-1} A \\ - (1 \pm pq') p'^{n-1} q^{n-1} A \pm q^n q'^n A^2.$$

Nun ist (siehe oben unter I.)  $1 \mp p'q = \mp pq'$  und  $1 \pm pq' = \pm p'q$ , folglich:

$$(p^n - q^n A) D = \pm p^n p'^n \mp p^n q'^n A \mp p'^n q^n A \pm q^n q'^n A^2 \\ = \pm (p'^n - q'^n A) \cdot (p^n - q^n A),$$

$$D = \pm (p'^n - q'^n A).$$

### §. 5.

Nachdem nun das in §. 3. aufgestellte Gesetz als allgemein gültig erwiesen ist, wir also des Schemas in §. 1. nicht mehr bedürfen, wollen wir im Folgenden, um unsere Bezeichnungsweise mit derjenigen in Egen's Handbuch angenommenen gänzlich in Uebereinstimmung zu bringen, den rationalen Theil im Zähler des vollständigen Quotienten nicht mehr  $z$ , sondern  $J$  nennen.

Dass  $D$  und  $J$  immer ganze Zahlen sind, ergibt sich unmittelbar aus den für diese Grössen gefundenen Werthen.

$D$  ist aber auch immer positiv. Denn:

Ist  $\frac{p}{q}$  ein Näherungsbruch ungerader Ordnung, so ist:



Ist nun  $n=2$ , so liegt  $\sqrt{(r-1)r}$  näher bei  $r-1$  als bei  $r$ , weil  $(r-1)r < (r-\frac{1}{2})^2$ . Da aber  $\sqrt[n]{A} - \frac{p^0}{q^0} > \frac{p}{q} - \sqrt[n]{A}$ , so ist in diesem Falle  $\frac{p}{q} < r$ ; folglich kann  $p$  nicht  $=r$  und  $q$  nicht  $=1$  sein. Bei der Ausziehung der Quadratwurzel kann also der eben erwähnte Fall nicht stattfinden. Auch beweist Egen §. 291., dass bei Ausziehung der Quadratwurzel  $J$  immer positiv ist.

Ist aber  $n=3$ , so liegt  $\sqrt[3]{(r-1)r^2}$  näher bei  $r$  als bei  $r-1$ , weil  $(r-1)r^2 > (r-\frac{1}{2})^3$ . Ist  $n > 3$ , so liegt noch um so mehr  $\sqrt[n]{(r-1)r^{n-1}}$  näher bei  $r$  als bei  $r-1$ . Ist also  $n > 2$  und  $A$  von der Form  $(r-1)r^{n-1}$ , so wird  $p=r$  und  $q=1$  sein. Dann ist  $p^0 p^{n-1} = q^0 q^{n-1} A$ , also  $J=0$ , und zwar im zweiten vollständigen Quotienten. Beispiele:  $\sqrt[3]{4}$ ,  $\sqrt[3]{18}$ ,  $\sqrt[3]{48}$ ,  $\sqrt[3]{100}$ ,  $\sqrt[3]{54}$ .

Doch kann auch in Fällen, wo  $A$  nicht von der Form  $(r-1)r^{n-1}$ , dennoch  $J=0$  sein, wie z. B. bei  $\sqrt[3]{98}$  im vierten vollständigen Quotienten.

Meistens ist  $J$  positiv; denn auch solcher Fälle, in welchen  $J$  negativ ist, sind nur wenige, wie dies aus den Zahlenbeispielen zu ersehen ist.

Im zweiten vollständigen Quotienten muss  $J$  negativ sein, wenn  $q = q^0 = 1$  und  $p^0 p^{n-1} > A$  ist. Beispiele:  $\sqrt[3]{98}$ ,  $\sqrt[3]{890}$ ,  $\sqrt[4]{41}$ ,  $\sqrt[5]{10}$ .

## §. 6.

Der die Grösse  $\sqrt[n]{A}$  ausdrückende Kettenbruch ist, ausgenommen, wenn  $n=2$ , niemals ein periodischer. Denn da  $p' > p$ ,  $p'' > p'$ , u. s. w., und  $q' > q$ ,  $q'' > q'$ , u. s. w., so kann nicht derselbe vollständige Quotient zweimal vorkommen. Auch können nicht zwei vollständige Quotienten einander gleich sein. Denn wenn etwa

$$\left\{ \begin{array}{l} q^{n-2} \sqrt[n]{A^{n-1}} + q^{n-3} p \sqrt[n]{A^{n-2}} + q^{n-4} p^2 \sqrt[n]{A^{n-3}} + \dots \\ \dots + q^2 p^{n-4} \sqrt[n]{A^3} + p q^{n-3} \sqrt[n]{A^2} + p^{n-2} \sqrt[n]{A} \pm (p_0 p^{n-1} - q_0 q^{n-1} A) \end{array} \right\} \\ \hline \mp (p^n - q^n A)$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} q_1^{n-2} \sqrt[n]{A^{n-1}} + q_1^{n-3} p_1 \sqrt[n]{A^{n-2}} + q_1^{n-4} p_1^2 \sqrt[n]{A^{n-3}} + \dots \\ + q_1^2 p_1^{n-4} \sqrt[n]{A^3} + q_1 p_1^{n-3} \sqrt[n]{A^2} + p_1^{n-2} \sqrt[n]{A} \pm (p_1^0 p_1^{n-1} - q_1^0 q_1^{n-1} A) \end{array} \right\} \\ \hline \mp (p_1^n - q_1^n A)$$









Eine Hauptschwierigkeit ist immer, die in den irrationalen Grössen enthaltenen grössten ganzen Zahlen zu finden. Doch werden die Unterschiede zwischen diesen Grössen, abgesehen von den Zeichen, immer kleiner werden, also die in denselben enthaltenen grössten ganzen Zahlen bald einander gleich sein, wesshalb man dann von da an jedesmal nur Eine derselben zu suchen und dieselbe  $n$ -lmal zu nehmen hat.

### §. 9. Zahlenbeispiele.

$x = \sqrt{2} =$	$1 + \frac{1}{x'}$	0	1
$x' = \frac{\sqrt{2+1}}{1} =$	$2 + \frac{1}{x''}$	1	1
$x'' = \frac{\sqrt{2+1}}{1} =$	$2 + \frac{1}{x'''} =$	2	3
$x''' = \frac{\sqrt{2+1}}{1} =$	$2 + \frac{1}{x^{IV}}$	5	7
$x^{IV} = \frac{\sqrt{2+1}}{1} =$	$2 + \frac{1}{x^V}$	12	17
$x^V = \frac{\sqrt{2+1}}{1} =$	$2 + \frac{1}{x^{VI}}$	29	41
u. s. w.		70	99
$x = \sqrt{15} =$	$3 + \frac{1}{x'}$	0	1
$x' = \frac{\sqrt{15+3}}{6} =$	$1 + \frac{1}{x''}$	1	3
$x'' = \frac{\sqrt{15+3}}{1} =$	$6 + \frac{1}{x'''} =$	1	4
$x''' = \frac{\sqrt{15+3}}{6} =$	$1 + \frac{1}{x^{IV}}$	7	27
$x^{IV} = \frac{\sqrt{15+3}}{1} =$	$6 + \frac{1}{x^V}$	8	31
$x^V = \frac{\sqrt{15+3}}{6} =$	$1 + \frac{1}{x^{VI}}$	55	213
u. s. w.		63	244

$x$	$= \sqrt{43} =$	$6 + \frac{1}{x'}$	0	1
$x'$	$= \frac{\sqrt{43}+6}{7} =$	$1 + \frac{1}{x''}$	1	6
$x''$	$= \frac{\sqrt{43}+1}{6} =$	$1 + \frac{1}{x'''} =$	1	7
$x'''$	$= \frac{\sqrt{43}+5}{3} =$	$3 + \frac{1}{x^{IV}}$	2	13
$x^{IV}$	$= \frac{\sqrt{43}+4}{9} =$	$1 + \frac{1}{x^V}$	7	46
$x^V$	$= \frac{\sqrt{43}+5}{2} =$	$5 + \frac{1}{x^{VI}}$	9	59
$x^{VI}$	$= \frac{\sqrt{43}+5}{9} =$	$1 + \frac{1}{x^{VII}}$	52	341
$x^{VII}$	$= \frac{\sqrt{43}+4}{3} =$	$3 + \frac{1}{x^{VIII}}$	61	400
$x^{VIII}$	$= \frac{\sqrt{43}+5}{6} =$	$1 + \frac{1}{x^{IX}}$	235	1541
$x^{IX}$	$= \frac{\sqrt{43}+1}{7} =$	$1 + \frac{1}{x^{X}}$	296	1941
$x^{X}$	$= \frac{\sqrt{43}+6}{1} =$	$12 + \frac{1}{x^{XI}}$	531	3482
$x^{XI}$	$= \frac{\sqrt{43}+6}{7} =$	$1 + \frac{1}{x^{XII}}$	6668	43725
u. s. w.			7199	47207

$x$	$= \sqrt{73} =$	$8 + \frac{1}{x'}$	0	1
$x'$	$= \frac{\sqrt{73}+8}{9} =$	$1 + \frac{1}{x''}$	1	8
$x''$	$= \frac{\sqrt{73}+1}{8} =$	$1 + \frac{1}{x'''} =$	1	9
$x'''$	$= \frac{\sqrt{73}+7}{3} =$	$5 + \frac{1}{x^{IV}}$	2	17
$x^{IV}$	$= \frac{\sqrt{73}+8}{3} =$	$5 + \frac{1}{x^V}$	11	94
$x^V$	$= \frac{\sqrt{73}+7}{8} =$	$1 + \frac{1}{x^{VI}}$	57	487
$x^{VI}$	$= \frac{\sqrt{73}+1}{9} =$	$1 + \frac{1}{x^{VII}}$	68	581
$x^{VII}$	$= \frac{\sqrt{73}+8}{1} =$	$16 + \frac{1}{x^{VIII}}$	125	1068
$x^{VIII}$	$= \frac{\sqrt{73}+8}{9} =$	$1 + \frac{1}{x^{IX}}$	2068	17669
u. s. w.			2193	18737

$x$	$= \sqrt{97} =$	$9 + \frac{1}{x'}$	0	1
$x'$	$= \frac{\sqrt{97+9}}{16} =$	$1 + \frac{1}{x''}$	1	9
$x''$	$= \frac{\sqrt{97+7}}{3} =$	$5 + \frac{1}{x'''} =$	1	10
$x'''$	$= \frac{\sqrt{97+8}}{11} =$	$1 + \frac{1}{x^{IV}}$	6	59
$x^{IV}$	$= \frac{\sqrt{97+3}}{8} =$	$1 + \frac{1}{x^V}$	7	69
$x^V$	$= \frac{\sqrt{97+5}}{9} =$	$1 + \frac{1}{x^{VI}}$	13	128
$x^{VI}$	$= \frac{\sqrt{97+4}}{9} =$	$1 + \frac{1}{x^{VII}}$	20	197
$x^{VII}$	$= \frac{\sqrt{97+5}}{8} =$	$1 + \frac{1}{x^{VIII}}$	33	326
$x^{VIII}$	$= \frac{\sqrt{97+3}}{11} =$	$1 + \frac{1}{x^{IX}}$	53	522
$x^{IX}$	$= \frac{\sqrt{97+8}}{3} =$	$5 + \frac{1}{x^{X}}$	86	847
$x^X$	$= \frac{\sqrt{97+7}}{16} =$	$1 + \frac{1}{x^{XI}}$	483	4757
$x^{XI}$	$= \frac{\sqrt{97+9}}{1} =$	$18 + \frac{1}{x^{XII}}$	569	5604
$x^{XII}$	$= \frac{\sqrt{97+9}}{16} =$	$1 + \frac{1}{x^{XIII}}$	10726	105629
u. s. w.			11294	111233

$= \sqrt[3]{2} =$	$1 + \frac{1}{x'}$	0	1
$= \frac{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1}{1} =$	$3 + \frac{1}{x''}$	1	1
$= \frac{3\sqrt[3]{4} + 4\sqrt[3]{2} + 2}{10} =$	$1 + \frac{1}{x'''} =$	3	4
$= \frac{4\sqrt[3]{4} + 5\sqrt[3]{2} + 4}{3} =$	$5 + \frac{1}{x^{IV}}$	4	5
$= \frac{23\sqrt[3]{4} + 29\sqrt[3]{2} + 27}{55} =$	$1 + \frac{1}{x^{V}}$	23	29
$= \frac{27\sqrt[3]{4} + 34\sqrt[3]{2} - 10}{62} =$	$1 + \frac{1}{x^{VI}}$	27	34
$= \frac{50\sqrt[3]{4} + 63\sqrt[3]{2} + 54}{47} =$	$4 + \frac{1}{x^{VII}}$	50	63
$= \frac{227\sqrt[3]{4} + 286\sqrt[3]{2} + 248}{510} =$	$1 + \frac{1}{x^{VIII}}$	227	286
$= \frac{277\sqrt[3]{4} + 349\sqrt[3]{2} - 120}{683} =$	$1 + \frac{1}{x^{IX}}$	277	349
$= \frac{504\sqrt[3]{4} + 635\sqrt[3]{2} + 661}{253} =$	$8 + \frac{1}{x^{X}}$	504	635
$= \frac{4309\sqrt[3]{4} + 5429\sqrt[3]{2} + 4813}{17331} =$	$1 + \frac{1}{x^{XI}}$	4309	5429
$= \frac{4813\sqrt[3]{4} + 6064\sqrt[3]{2} + 6342}{1450} =$	$14 + \frac{1}{x^{XII}}$	4813	6064
$= \frac{71691\sqrt[3]{4} + 90325\sqrt[3]{2} + 94106}{293383} =$	$1 + \frac{1}{x^{XIII}}$	71691	90325
$= \frac{76504\sqrt[3]{4} + 96389\sqrt[3]{2} + 91213}{32259} =$	$10 + \frac{1}{x^{XIV}}$	76504	96389
u. s. w.		836731	1064215

$x = \sqrt[3]{3} =$	$1 + \frac{1}{x'}$	0	1
$x' = \frac{\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{3} + 1}{2} =$	$2 + \frac{1}{x''}$	1	1
$x'' = \frac{2\sqrt[3]{9} + 3\sqrt[3]{3} + 3}{3} =$	$3 + \frac{1}{x'''}$	2	3
$x''' = \frac{7\sqrt[3]{9} + 10\sqrt[3]{3} + 6}{29} =$	$1 + \frac{1}{x^{IV}}$	7	10
$x^{IV} = \frac{9\sqrt[3]{9} + 13\sqrt[3]{3} + 11}{10} =$	$4 + \frac{1}{x^V}$	9	13
$x^V = \frac{43\sqrt[3]{9} + 62\sqrt[3]{3} + 49}{193} =$	$1 + \frac{1}{x^{VI}}$	43	62
$x^{VI} = \frac{52\sqrt[3]{9} + 75\sqrt[3]{3} + 66}{51} =$	$5 + \frac{1}{x^{VII}}$	52	75
$x^{VII} = \frac{303\sqrt[3]{9} + 437\sqrt[3]{3} + 471}{928} =$	$1 + \frac{1}{x^{VIII}}$	303	437
u. s. w.		355	512
<hr/>			
$x = \sqrt[3]{4} =$	$1 + \frac{1}{x'}$	0	1
$x' = \frac{\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{4} + 1}{3} =$	$1 + \frac{1}{x''}$	1	1
$x'' = \frac{\sqrt[3]{16} + 2\sqrt[3]{4}}{4} =$	$1 + \frac{1}{x'''}$	1	2
$x''' = \frac{2\sqrt[3]{16} + 3\sqrt[3]{4} + 2}{5} =$	$2 + \frac{1}{x^{IV}}$	2	3
$x^{IV} = \frac{5\sqrt[3]{16} + 8\sqrt[3]{4} + 8}{12} =$	$2 + \frac{1}{x^V}$	5	8
$x^V = \frac{12\sqrt[3]{16} + 19\sqrt[3]{4} + 8}{53} =$	$1 + \frac{1}{x^{VI}}$	12	19
$x^{VI} = \frac{17\sqrt[3]{16} + 27\sqrt[3]{4} + 21}{31} =$	$3 + \frac{1}{x^{VII}}$	17	27
$x^{VII} = \frac{63\sqrt[3]{16} + 100\sqrt[3]{4} + 108}{188} =$	$2 + \frac{1}{x^{VIII}}$	63	100
u. s. w.		143	227



$= \sqrt[3]{5} =$	$1 + \frac{1}{x'}$	0	1
$= \frac{\sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{5} + 1}{4} =$	$1 + \frac{1}{x''}$	1	1
$= \frac{\sqrt[3]{25} + 2\sqrt[3]{5} + 1}{3} =$	$2 + \frac{1}{x'''} =$	1	2
$= \frac{3\sqrt[3]{25} + 5\sqrt[3]{5} + 5}{10} =$	$2 + \frac{1}{x^{IV}}$	3	5
$= \frac{7\sqrt[3]{25} + 12\sqrt[3]{5} + 15}{13} =$	$4 + \frac{1}{x^V}$	7	12
$= \frac{31\sqrt[3]{25} + 53\sqrt[3]{5} + 73}{78} =$	$3 + \frac{1}{x^{VI}}$	31	53
$= \frac{100\sqrt[3]{25} + 171\sqrt[3]{5} + 227}{211} =$	$3 + \frac{1}{x^{VII}}$	100	171
$= \frac{331\sqrt[3]{25} + 566\sqrt[3]{5} + 376}{1959} =$	$1 + \frac{1}{x^{VIII}}$	331	566
u. s. w.		431	737

$= \sqrt[3]{6} =$	$1 + \frac{1}{x'}$	0	1
$= \frac{\sqrt[3]{36} + \sqrt[3]{6} + 1}{5} =$	$1 + \frac{1}{x''}$	1	1
$= \frac{\sqrt[3]{36} + 2\sqrt[3]{6} + 2}{2} =$	$4 + \frac{1}{x'''} =$	1	2
$= \frac{5\sqrt[3]{36} + 9\sqrt[3]{6} + 12}{21} =$	$2 + \frac{1}{x^{IV}}$	5	9
$= \frac{11\sqrt[3]{36} + 20\sqrt[3]{6} + 30}{14} =$	$7 + \frac{1}{x^V}$	11	20
$= \frac{82\sqrt[3]{36} + 149\sqrt[3]{6} + 236}{259} =$	$3 + \frac{1}{x^{VI}}$	82	149
$= \frac{257\sqrt[3]{36} + 467\sqrt[3]{6} + 847}{5} =$	$508 + \frac{1}{x^{VII}}$	257	467
u. s. w.		130638	237385

$x = \sqrt[3]{7} =$	$1 + \frac{1}{x'}$	0	1
$x' = \frac{\sqrt[3]{49} + \sqrt[3]{7} + 1}{6} =$	$1 + \frac{1}{x''}$	1	1
$x'' = \frac{\sqrt[3]{49} + 2\sqrt[3]{7} + 3}{1} =$	$10 + \frac{1}{x'''} =$	1	2
$x''' = \frac{11\sqrt[3]{49} + 21\sqrt[3]{7} + 35}{56} =$	$2 + \frac{1}{x^{IV}}$	11	21
$x^{IV} = \frac{23\sqrt[3]{49} + 44\sqrt[3]{7} + 77}{15} =$	$16 + \frac{1}{x^V}$	23	44
$x^V = \frac{379\sqrt[3]{49} + 725\sqrt[3]{7} + 1299}{1448} =$	$2 + \frac{1}{x^{VI}}$	379	725
u. s. w.		781	1494
$x = \sqrt[3]{9} =$	$2 + \frac{1}{x'}$	0	1
$x' = \frac{\sqrt[3]{81} + 2\sqrt[3]{9} + 4}{1} =$	$12 + \frac{1}{x''}$	1	2
$x'' = \frac{12\sqrt[3]{81} + 25\sqrt[3]{9} + 46}{73} =$	$2 + \frac{1}{x'''} =$	12	25
$x''' = \frac{25\sqrt[3]{81} + 52\sqrt[3]{9} + 100}{17} =$	$18 + \frac{1}{x^{IV}}$	25	52
$x^{IV} = \frac{462\sqrt[3]{81} + 961\sqrt[3]{9} + 1808}{3529} =$	$1 + \frac{1}{x^V}$	462	961
$x^V = \frac{487\sqrt[3]{81} + 1013\sqrt[3]{9} - 293}{2530} =$	$1 + \frac{1}{x^{VI}}$	487	1013
u. s. w.		949	1974
$x = \sqrt[3]{10} =$	$2 + \frac{1}{x'}$	0	1
$x' = \frac{\sqrt[3]{100} + 2\sqrt[3]{10} + 4}{2} =$	$6 + \frac{1}{x''}$	1	2
$x'' = \frac{6\sqrt[3]{100} + 13\sqrt[3]{10} + 22}{37} =$	$2 + \frac{1}{x'''} =$	6	13
$x''' = \frac{13\sqrt[3]{100} + 28\sqrt[3]{10} + 52}{18} =$	$9 + \frac{1}{x^{IV}}$	13	28
$x^{IV} = \frac{123\sqrt[3]{100} + 265\sqrt[3]{10} + 470}{955} =$	$1 + \frac{1}{x^V}$	123	265
$x^V = \frac{136\sqrt[3]{100} + 293\sqrt[3]{10} - 95}{803} =$	$1 + \frac{1}{x^{VI}}$	136	293
$x^{VI} = \frac{259\sqrt[3]{100} + 558\sqrt[3]{10} + 508}{1322}$	$\sim \frac{1}{x^{VII}}$	259	558
u. s. w.		654	

$= \sqrt[3]{15} =$	$2 + \frac{1}{x'}$	0	1
$= \frac{\sqrt[3]{225} + 2\sqrt[3]{15} + 4}{7} =$	$2 + \frac{1}{x''}$	1	2
$= \frac{2\sqrt[3]{225} + 5\sqrt[3]{15} + 10}{5} =$	$6 + \frac{1}{x'''} =$	2	5
$= \frac{13\sqrt[3]{225} + 32\sqrt[3]{15} + 50}{187} =$	$1 + \frac{1}{x^{IV}}$	13	32
$= \frac{15\sqrt[3]{225} + 37\sqrt[3]{15} + 67}{28} =$	$8 + \frac{1}{x^V}$	15	37
$= \frac{133\sqrt[3]{225} + 328\sqrt[3]{15} + 583}{2003} =$	$1 + \frac{1}{x^{VI}}$	133	328
$= \frac{148\sqrt[3]{225} + 365\sqrt[3]{15} + 680}{245} =$	$10 + \frac{1}{x^{VII}}$	148	365
u. s. w.		1613	3978

$= \sqrt[3]{18} =$	$2 + \frac{1}{x'}$	0	1
$= \frac{\sqrt[3]{324} + 2\sqrt[3]{18} + 4}{10} =$	$1 + \frac{1}{x''}$	1	2
$= \frac{\sqrt[3]{324} + 3\sqrt[3]{18}}{9} =$	$1 + \frac{1}{x'''}$	1	3
$= \frac{2\sqrt[3]{324} + 5\sqrt[3]{18} + 3}{19} =$	$1 + \frac{1}{x^{IV}}$	2	5
$= \frac{3\sqrt[3]{324} + 8\sqrt[3]{18} + 4}{26} =$	$1 + \frac{1}{x^V}$	3	8
$= \frac{5\sqrt[3]{324} + 13\sqrt[3]{18} + 2}{53} =$	$1 + \frac{1}{x^{VI}}$	5	13
$= \frac{8\sqrt[3]{324} + 21\sqrt[3]{18} + 27}{45} =$	$3 + \frac{1}{x^{VII}}$	8	21
$= \frac{29\sqrt[3]{324} + 76\sqrt[3]{18} + 192}{26} =$	$22 + \frac{1}{x^{VIII}}$	29	76
u. s. w.		646	1693

$r = \sqrt[3]{19}$	$2 + \frac{1}{x}$	0	1
$r' = \frac{\sqrt[3]{361} + 2\sqrt[3]{19} + 4}{11}$	$1 + \frac{1}{x''}$	1	2
$r'' = \frac{\sqrt[3]{361} + 3\sqrt[3]{19} + 1}{8} =$	$2 + \frac{1}{x'''}$	1	3
$r''' = \frac{3\sqrt[3]{361} + 8\sqrt[3]{19} + 21}{1} =$	$63 + \frac{1}{x^{IV}}$	3	8
$r^{IV} = \frac{190\sqrt[3]{361} + 507\sqrt[3]{19} + 1308}{2843} = 1 + \frac{1}{x^V}$		190	507
$r^V = \frac{193\sqrt[3]{361} + 515\sqrt[3]{19} + 185}{1208} = 2 + \frac{1}{x^{VI}}$		193	515
u. s. w.		576	1537

$r = \sqrt[3]{48}$	$3 + \frac{1}{x}$	0	1
$r' = \frac{\sqrt[3]{2304} + 3\sqrt[3]{48} + 9}{21} =$	$1 + \frac{1}{x}$	1	3
$r'' = \frac{\sqrt[3]{2304} + 4\sqrt[3]{48}}{16} =$	$1 + \frac{1}{x}$	1	4
$r''' = \frac{2\sqrt[3]{2304} + 7\sqrt[3]{48} + 4}{41}$	$1 + \frac{1}{x}$	2	7
$r^{IV} = \frac{3\sqrt[3]{2304} + 11\sqrt[3]{48} + 1}{35} =$		3	11
$r^V = \frac{8\sqrt[3]{2304} + 20\sqrt[3]{48} + 3}{187}$		8	20
$r^{VI} = \frac{11\sqrt[3]{2304} + 40\sqrt[3]{48}}{11}$		11	40
$r^{VII} = \frac{41\sqrt[3]{2304} + 12\sqrt[3]{48}}{12}$		41	12

$= \sqrt[3]{75} =$	$4 + \frac{1}{x'}$	0	1
$= \frac{\sqrt[3]{5625} + 4\sqrt[3]{75} + 16}{11} =$	$4 + \frac{1}{x''}$	1	4
$= \frac{4\sqrt[3]{5625} + 17\sqrt[3]{75} + 44}{113} =$	$1 + \frac{1}{x'''}$	4	17
$= \frac{5\sqrt[3]{5625} + 21\sqrt[3]{75} - 3}{114} =$	$1 + \frac{1}{x^{IV}}$	5	21
$= \frac{9\sqrt[3]{5625} + 38\sqrt[3]{75} + 51}{197} =$	$1 + \frac{1}{x^V}$	9	38
$= \frac{14\sqrt[3]{5625} + 59\sqrt[3]{75} - 22}{421} =$	$1 + \frac{1}{x^{VI}}$	14	59
$= \frac{23\sqrt[3]{5625} + 97\sqrt[3]{75} + 319}{148} =$	$7 + \frac{1}{x^{VII}}$	23	97
u. s. w.		175	738

$= \sqrt[3]{98} =$	$4 + \frac{1}{x'}$	0	1
$= \frac{\sqrt[3]{9604} + 4\sqrt[3]{98} + 16}{34} =$	$1 + \frac{1}{x''}$	1	4
$= \frac{\sqrt[3]{9604} + 5\sqrt[3]{98} - 2}{27} =$	$1 + \frac{1}{x'''}$	1	5
$= \frac{2\sqrt[3]{9604} + 9\sqrt[3]{98} + 13}{55} =$	$1 + \frac{1}{x^{IV}}$	2	9
$= \frac{3\sqrt[3]{9604} + 14\sqrt[3]{98}}{98} =$	$1 + \frac{1}{x^V}$	3	14
$= \frac{5\sqrt[3]{9604} + 23\sqrt[3]{98} + 56}{83} =$	$3 + \frac{1}{x^{VI}}$	5	23
$= \frac{18\sqrt[3]{9604} + 83\sqrt[3]{98} + 313}{251} =$	$4 + \frac{1}{x^{VII}}$	18	83
$= \frac{77\sqrt[3]{9604} + 355\sqrt[3]{98} + 1319}{1359} =$	$3 + \frac{1}{x^{VIII}}$	77	355
u. s. w.		249	1148

$x = \sqrt[3]{100} =$	$4 + \frac{1}{x'}$	0	1
$x' = \frac{\sqrt[3]{10000} + 4\sqrt[3]{100} + 16}{36} =$	$1 + \frac{1}{x''}$	1	4
$x'' = \frac{\sqrt[3]{10000} + 5\sqrt[3]{100}}{25} =$	$1 + \frac{1}{x'''}$	1	5
$x''' = \frac{2\sqrt[3]{10000} + 9\sqrt[3]{100} + 5}{71} =$	$1 + \frac{1}{x^{IV}}$	2	9
$x^{IV} = \frac{3\sqrt[3]{10000} + 14\sqrt[3]{100} + 36}{44} =$	$3 + \frac{1}{x^V}$	3	14
$x^V = \frac{11\sqrt[3]{10000} + 51\sqrt[3]{100} + 114}{449} =$	$1 + \frac{1}{x^{VI}}$	11	51
$x^{VI} = \frac{14\sqrt[3]{10000} + 65\sqrt[3]{100} + 125}{225} =$	$3 + \frac{1}{x^{VII}}$	14	65
$x^{VII} = \frac{53\sqrt[3]{10000} + 246\sqrt[3]{100} + 940}{764} =$	$4 + \frac{1}{x^{VIII}}$	53	246
u. s. w.		226	1049
$x = \sqrt[3]{300} =$	$6 + \frac{1}{x'}$	0	1
$x' = \frac{\sqrt[3]{90000} + 6\sqrt[3]{300} + 36}{84} =$	$1 + \frac{1}{x''}$	1	6
$x'' = \frac{\sqrt[3]{90000} + 7\sqrt[3]{300} + 6}{43} =$	$2 + \frac{1}{x'''}$	1	7
$x''' = \frac{3\sqrt[3]{90000} + 20\sqrt[3]{300} + 100}{100} =$	$3 + \frac{1}{x^{IV}}$	3	20
$x^{IV} = \frac{10\sqrt[3]{90000} + 67\sqrt[3]{300} + 220}{763} =$	$1 + \frac{1}{x^V}$	10	67
$x^V = \frac{13\sqrt[3]{90000} + 87\sqrt[3]{300} + 123}{597} =$	$2 + \frac{1}{x^{VI}}$	13	87
$x^{VI} = \frac{36\sqrt[3]{90000} + 241\sqrt[3]{300} + 1353}{721} =$	$6 + \frac{1}{x^{VII}}$	36	241
$x^{VII} = \frac{229\sqrt[3]{90000} + 1533\sqrt[3]{300} + 8649}{10263} =$	$2 + \frac{1}{x^{VIII}}$	229	1533
u. s. w.		494	3307

$= \sqrt[3]{890} =$	$9 + \frac{1}{x'}$	0	1
$= \frac{\sqrt[3]{792100} + 9\sqrt[3]{890} + 81}{161} =$	$1 + \frac{1}{x''}$	1	9
$= \frac{\sqrt[3]{792100} + 10\sqrt[3]{890} - 10}{110} =$	$1 + \frac{1}{x'''}$	1	10
$= \frac{2\sqrt[3]{792100} + 19\sqrt[3]{890} + 50}{261} =$	$1 + \frac{1}{x^{IV}}$	2	19
$= \frac{3\sqrt[3]{792100} + 29\sqrt[3]{890} + 41}{359} =$	$1 + \frac{1}{x^V}$	3	29
$= \frac{5\sqrt[3]{792100} + 48\sqrt[3]{890} + 66}{658} =$	$1 + \frac{1}{x^{VI}}$	5	48
$= \frac{8\sqrt[3]{792100} + 77\sqrt[3]{890} + 208}{853} =$	$1 + \frac{1}{x^{VII}}$	8	77
$= \frac{13\sqrt[3]{792100} + 125\sqrt[3]{890} - 155}{2205} =$	$1 + \frac{1}{x^{VIII}}$	13	125
$= \frac{21\sqrt[3]{792100} + 202\sqrt[3]{890} + 1870}{118} =$	$48 + \frac{1}{x^{IX}}$	21	202
u. s. w.		1021	9821

$= \sqrt[4]{41} =$	$2 + \frac{1}{x'}$	0	1
$= \frac{\sqrt[4]{68921} + 2\sqrt[4]{1681} + 4\sqrt[4]{41} + 8}{25} =$	$1 + \frac{1}{x''}$	1	2
$= \frac{\sqrt[4]{68921} + 3\sqrt[4]{1681} + 9\sqrt[4]{41} - 13}{40} =$	$1 + \frac{1}{x'''}$	1	3
$= \frac{4\sqrt[4]{68921} + 10\sqrt[4]{1681} + 25\sqrt[4]{41} + 47}{31} =$	$7 + \frac{1}{x^{IV}}$	2	5
$= \frac{225\sqrt[4]{68921} + 570\sqrt[4]{1681} + 1444\sqrt[4]{41} + 2390}{9511} =$	$1 + \frac{1}{x^V}$	15	38
$= \frac{289\sqrt[4]{68921} + 731\sqrt[4]{1681} + 1849\sqrt[4]{41} - 229}{5560} =$	$2 + \frac{1}{x^{VI}}$	17	43
$= \frac{2401\sqrt[4]{68921} + 6076\sqrt[4]{1681} + 15376\sqrt[4]{41} + 16521}{64535} =$	$2 + \frac{1}{x^{VII}}$	49	124
$= \frac{13225\sqrt[4]{68921} + 33465\sqrt[4]{1681} + 84681\sqrt[4]{41} + 191329}{53864} =$	$15 + \frac{1}{x^{VIII}}$	115	291
u. s. w.		1774	4489

$x = \sqrt[4]{54} =$	$2 + \frac{1}{x'}$	0	
$x' = \frac{\sqrt[4]{157464} + 2\sqrt[4]{2916} + 4\sqrt[4]{54} + 8}{38} =$	$1 + \frac{1}{x''}$	1	
$x'' = \frac{\sqrt[4]{157464} + 3\sqrt[4]{2916} + 9\sqrt[4]{54}}{27} =$	$2 + \frac{1}{x'''} =$	1	
$x''' = \frac{9\sqrt[4]{157464} + 24\sqrt[4]{2916} + 64\sqrt[4]{54} + 78}{278} =$	$2 + \frac{1}{x^{IV}}$	3	
$x^{IV} = \frac{49\sqrt[4]{157464} + 133\sqrt[4]{2916} + 361\sqrt[4]{54} + 694}{667} =$	$5 + \frac{1}{x^V}$	7	
$x^V = \frac{1444\sqrt[4]{157464} + 3914\sqrt[4]{2916} + 10609\sqrt[4]{54} + 20197}{46463}$			
	$= 2 + \frac{1}{x^{VI}}$	38	1
$x^{VI} = \frac{6889\sqrt[4]{157464} + 18675\sqrt[4]{2916} + 50625\sqrt[4]{54} + 72549}{141291}$			
	$= 3 + \frac{1}{x^{VII}}$	83	2
$x^{VII} = \frac{82369\sqrt[4]{157464} + 223286\sqrt[4]{2916} + 605284\sqrt[4]{54} + 918954}{2496038}$			
	$= 2 + \frac{1}{x^{VIII}}$	287	7
u. s. w.		657	17

$x = \sqrt[4]{250} =$	$3 + \frac{1}{x'}$	0	
$x' = \frac{\sqrt[4]{15625000} + 3\sqrt[4]{62500} + 9\sqrt[4]{250} + 27}{169} =$	$1 + \frac{1}{x''}$	1	
$x'' = \frac{\sqrt[4]{15625000} + 4\sqrt[4]{62500} + 16\sqrt[4]{250} + 58}{6} =$	$41 + \frac{1}{x'''} =$	1	
$x''' = \frac{1764\sqrt[4]{15625000} + 7014\sqrt[4]{62500} + 27889\sqrt[4]{250} + 107852}{127679}$			
	$= 3 + \frac{1}{x^{IV}}$	42	10
$x^{IV} = \frac{\left\{ 16129\sqrt[4]{15625000} + 64135\sqrt[4]{62500} + 255025\sqrt[4]{250} \right\} + 488125}{1590375}$			
	$= 2 + \frac{1}{x^V}$	127	51
u. s. w.		298	117



$= \sqrt[5]{2} =$	$1 + \frac{1}{x'}$	0	1
$= \frac{\sqrt[5]{16} + \sqrt[5]{8} + \sqrt[5]{4} + \sqrt[5]{2} + 1}{1} =$	$6 + \frac{1}{x''}$	1	1
$= \frac{216\sqrt[5]{16} + 252\sqrt[5]{8} + 294\sqrt[5]{4} + 343\sqrt[5]{2} + 191}{1255} = 1 + \frac{1}{x^m}$		6	7
$= \frac{343\sqrt[5]{16} + 392\sqrt[5]{8} + 448\sqrt[5]{4} + 512\sqrt[5]{2} - 140}{846} = 2 + \frac{1}{x^{IV}}$		7	8
$= \frac{8000\sqrt[5]{16} + 9200\sqrt[5]{8} + 10580\sqrt[5]{4} + 12167\sqrt[5]{2} + 1272}{36343}$	$= 1 + \frac{1}{x^V}$	20	23
$= \frac{19683\sqrt[5]{16} + 22599\sqrt[5]{8} + 25947\sqrt[5]{4} + 29791\sqrt[5]{2} - 16657}{68663}$	$= 1 + \frac{1}{x^{VI}}$	27	31
$\gamma = \frac{\left\{ \begin{array}{l} 103823\sqrt[5]{16} + 119286\sqrt[5]{8} + 137052\sqrt[5]{4} + 157464\sqrt[5]{2} \\ - 91962 \end{array} \right\}}{475010}$			
	$= 1 + \frac{1}{x^{VII}}$	47	54
$m = \frac{\left\{ \begin{array}{l} 405224\sqrt[5]{16} + 465460\sqrt[5]{8} + 534650\sqrt[5]{4} + 614125\sqrt[5]{2} \\ + 95606 \end{array} \right\}}{960123}$			
	$= 3 + \frac{1}{x^{VIII}}$	74	85
u. s. w.		269	309

$= \sqrt[5]{3} =$	$1 + \frac{1}{x'}$	0	1
$= \frac{\sqrt[5]{81} + \sqrt[5]{27} + \sqrt[5]{9} + \sqrt[5]{3} + 1}{2} =$	$4 + \frac{1}{x''}$	1	1
$= \frac{64\sqrt[5]{81} + 80\sqrt[5]{27} + 100\sqrt[5]{9} + 125\sqrt[5]{3} + 143}{53} = 14 + \frac{1}{x^m}$		4	5
$= \frac{\left\{ \begin{array}{l} 185193\sqrt[5]{81} + 230679\sqrt[5]{27} + 287337\sqrt[5]{9} + 357911\sqrt[5]{3} \\ + 386393 \end{array} \right\}}{846820}$			
	$= 2 + \frac{1}{x^{IV}}$	57	71
$\alpha = \frac{\left\{ \begin{array}{l} 1643032\sqrt[5]{81} + 2046828\sqrt[5]{27} + 2549862\sqrt[5]{9} \\ + 3176523\sqrt[5]{3} - 270855 \end{array} \right\}}{8752803}$			
	$= 1 + \frac{1}{x^V}$	118	147
u. s. w.		175	218

$x$	$= \sqrt[5]{5} =$	$1 + \frac{1}{x'}$	0	
$x'$	$= \frac{\sqrt[5]{625} + \sqrt[5]{125} + \sqrt[5]{25} + \sqrt[5]{5} + 1}{4} =$	$2 + \frac{1}{x''}$	1	
$x''$	$= \frac{8\sqrt[5]{625} + 12\sqrt[5]{125} + 18\sqrt[5]{25} + 27\sqrt[5]{5} - 1}{83} =$	$1 + \frac{1}{x'''} =$	2	
$x'''$	$= \frac{27\sqrt[5]{625} + 36\sqrt[5]{125} + 48\sqrt[5]{25} + 64\sqrt[5]{5} - 42}{191} =$	$1 + \frac{1}{x^{IV}}$	3	
$x^{IV}$	$= \frac{125\sqrt[5]{625} + 175\sqrt[5]{125} + 245\sqrt[5]{25} + 343\sqrt[5]{5} - 229}{1182}$	$= 1 + \frac{1}{x^V}$	5	
$x^V$	$= \frac{512\sqrt[5]{625} + 704\sqrt[5]{125} + 968\sqrt[5]{25} + 1331\sqrt[5]{5} + 87}{2789}$	$= 2 + \frac{1}{x^{VI}}$	8	
$x^{VI}$	$= \frac{9261\sqrt[5]{625} + 12789\sqrt[5]{125} + 17661\sqrt[5]{25} + 24389\sqrt[5]{5} - 851}{90644}$	$= 1 + \frac{1}{x^{VII}}$	21	
$x^{VII}$	$= \frac{\{24389\sqrt[5]{625} + 33640\sqrt[5]{125} + 46400\sqrt[5]{25} + 64000\sqrt[5]{5}\} - 24505}{155745}$	$= 2 + \frac{1}{x^{VIII}}$	29	4
$x^{VIII}$	$= \frac{\{493039\sqrt[5]{625} + 680269\sqrt[5]{125} + 938599\sqrt[5]{25} + 1295029\sqrt[5]{5} + 1435305\}}{957554}$	$= 8 + \frac{1}{x^{IX}}$	79	10
u. s. w.			661	91

$x$	$= \sqrt[5]{7} =$	$1 + \frac{1}{x'}$	0	
$x'$	$= \frac{\sqrt[5]{2401} + \sqrt[5]{343} + \sqrt[5]{49} + \sqrt[5]{7} + 1}{6} =$	$2 + \frac{1}{x''}$	1	
$x''$	$= \frac{8\sqrt[5]{2401} + 12\sqrt[5]{343} + 18\sqrt[5]{49} + 27\sqrt[5]{7} + 31}{19} =$	$9 + \frac{1}{x'''} =$	2	
$x'''$	$= \frac{\{6859\sqrt[5]{2401} + 10108\sqrt[5]{343} + 14896\sqrt[5]{49} + 21952\sqrt[5]{7}\} + 19474}{122325}$	$= 1 + \frac{1}{x^{IV}}$	19	
$x^{IV}$	$= \frac{\{9261\sqrt[5]{2401} + 13671\sqrt[5]{343} + 20181\sqrt[5]{49} + 29791\sqrt[5]{7}\} + 7385}{40444}$	$= 4 + \frac{1}{x^V}$	21	

$$\begin{aligned}
 &= \sqrt[6]{41} = \sqrt[6]{A} = 1 + \frac{1}{x'} & 0 & 1 \\
 &= \frac{\sqrt[6]{A^6} + \sqrt[6]{A^5} + \sqrt[6]{A^4} + \sqrt[6]{A^3} + \sqrt[6]{A^2} + \sqrt[6]{A} + 1}{40} = 1 + \frac{1}{x''} & 1 & 1 \\
 &= \frac{\sqrt[6]{A^6} + 2\sqrt[6]{A^5} + 4\sqrt[6]{A^4} + 8\sqrt[6]{A^3} + 16\sqrt[6]{A^2} + 9}{23} = 5 + \frac{1}{x'''} & 1 & 2 \\
 &= \frac{\left\{ \begin{array}{l} 1296\sqrt[6]{A^6} + 2376\sqrt[6]{A^5} + 4356\sqrt[6]{A^4} \\ + 7986\sqrt[6]{A^3} + 14641\sqrt[6]{A^2} + 3286 \end{array} \right\}}{141335} = 1 + \frac{1}{x^{IV}} & 6 & 11 \\
 &= \frac{\left\{ \begin{array}{l} 2401\sqrt[6]{A^6} + 4459\sqrt[6]{A^5} + 8281\sqrt[6]{A^4} \\ + 15379\sqrt[6]{A^3} + 28561\sqrt[6]{A^2} + 50299 \end{array} \right\}}{3200} = 98 + \frac{1}{x^V} & 7 & 13 \\
 & \text{u. s. w.} & 692 & 1285
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sqrt[7]{601} = \sqrt[7]{A} = 2 + \frac{1}{x'} & 0 & 1 \\
 &= \frac{\left\{ \begin{array}{l} \sqrt[7]{A^7} + 2\sqrt[7]{A^6} + 4\sqrt[7]{A^5} + 8\sqrt[7]{A^4} \\ + 16\sqrt[7]{A^3} + 32\sqrt[7]{A^2} + 64 \end{array} \right\}}{473} = 2 + \frac{1}{x''} & 1 & 1 \\
 &= \frac{\left\{ \begin{array}{l} 32\sqrt[7]{A^7} + 80\sqrt[7]{A^6} + 200\sqrt[7]{A^5} + 500\sqrt[7]{A^4} \\ + 1250\sqrt[7]{A^3} + 3125\sqrt[7]{A^2} + 7214 \end{array} \right\}}{1197} = 44 + \frac{1}{x'''} & 2 & 5 \\
 & \text{u. s. w.} & 89 & 222
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sqrt[7]{2000} = \sqrt[7]{A} = 2 + \frac{1}{x'} & 0 & 1 \\
 &= \frac{\left\{ \begin{array}{l} \sqrt[7]{A^7} + 2\sqrt[7]{A^6} + 4\sqrt[7]{A^5} + 8\sqrt[7]{A^4} \\ + 16\sqrt[7]{A^3} + 32\sqrt[7]{A^2} + 64 \end{array} \right\}}{1872} = 1 + \frac{1}{x''} & 1 & 2 \\
 &= \frac{\left\{ \begin{array}{l} \sqrt[7]{A^7} + 3\sqrt[7]{A^6} + 9\sqrt[7]{A^5} + 27\sqrt[7]{A^4} \\ + 81\sqrt[7]{A^3} + 243\sqrt[7]{A^2} + 542 \end{array} \right\}}{187} = 25 + \frac{1}{x'''} & 1 & 3 \\
 &= \frac{\left\{ \begin{array}{l} 11881376\sqrt[7]{A^7} + 35187152\sqrt[7]{A^6} + 104208104\sqrt[7]{A^5} \\ + 308616308\sqrt[7]{A^4} + 913979066\sqrt[7]{A^3} \\ + 2706784157\sqrt[7]{A^2} + 7435588267 \end{array} \right\}}{15097085147} & & \\
 & \text{u. s. w.} & = 3 + \frac{1}{x^{IV}} & 26 & 77 \\
 & & & 79 & 23
 \end{aligned}$$

$x = \sqrt[11]{10} = \sqrt[11]{A} =$	$1 + \frac{1}{x'}$	0	
$x' = \frac{\left\{ \begin{array}{l} \sqrt[11]{A^{10}} + \sqrt[11]{A^9} + \sqrt[11]{A^8} + \sqrt[11]{A^7} + \sqrt[11]{A^6} \\ + \sqrt[11]{A^5} + \sqrt[11]{A^4} + \sqrt[11]{A^3} + \sqrt[11]{A^2} + \sqrt[11]{A} + 1 \end{array} \right\}}{9} = 4 + \frac{1}{x''}$	$4 + \frac{1}{x''}$	1	
$x'' = \frac{\left\{ \begin{array}{l} 4^9 \sqrt[11]{A^{10}} + 4^8 \cdot 5 \sqrt[11]{A^9} + 4^7 \cdot 5^2 \sqrt[11]{A^8} + 4^6 \cdot 5^3 \sqrt[11]{A^7} \\ + 4^5 \cdot 5^4 \sqrt[11]{A^6} + 4^4 \cdot 5^5 \sqrt[11]{A^5} + 4^3 \cdot 5^6 \sqrt[11]{A^4} \\ + 4^2 \cdot 5^7 \sqrt[11]{A^3} + 4 \cdot 5^8 \sqrt[11]{A^2} + 5^9 \sqrt[11]{A} + 720135 \end{array} \right\}}{6885085} = 3 + \frac{1}{x'''}$	$3 + \frac{1}{x'''}$	4	
$x''' = \frac{\left\{ \begin{array}{l} 13^9 \sqrt[11]{A^{10}} + 13^8 \cdot 16 \sqrt[11]{A^9} + 13^7 \cdot 16^2 \sqrt[11]{A^8} \\ + 13^6 \cdot 16^3 \sqrt[11]{A^7} + 13^5 \cdot 16^4 \sqrt[11]{A^6} \\ + 13^4 \cdot 16^5 \sqrt[11]{A^5} + 13^3 \cdot 16^6 \sqrt[11]{A^4} \\ + 13^2 \cdot 16^7 \sqrt[11]{A^3} + 13 \cdot 16^8 \sqrt[11]{A^2} \\ + 16^9 \sqrt[11]{A} - 16781535080 \end{array} \right\}}{329417895954} = 2 + \frac{1}{x^{IV}}$	$2 + \frac{1}{x^{IV}}$	13	1
u. s. w.		30	3

§. 10.

Man kann auch die irrationale GröÙe  $\sqrt[n]{A}$  in einen Kettenbruch verwandeln, ohne die Nenner der vollständigen Quotienten rational zu machen, und zwar in folgender Weise:

$a + \frac{1}{x}$	$0$	$1$	$1$
$a' + \frac{1}{x'}$	$1$	$a$	$a$
$a'' + \frac{1}{x''}$	$a'$	$a' + 1$	$a' + 1$
$a''' + \frac{1}{x'''}$	$a' a'' + 1$	$(a a' + 1) a'' + a$	$(a a' + 1) a'' + a$
$a^{IV} + \frac{1}{x^{IV}}$	$(a' a'' + 1) a'' + a'$	$(a a' + 1) a'' a''' + a a'' + 1$	$(a a' + 1) a'' a''' + a a'' + 1$

$$a = \sqrt[n]{A} = a + \frac{\sqrt[n]{A} - a}{1} =$$

$$a' = \frac{1}{\sqrt[n]{A} - a} = a' + \frac{1 - a'(\sqrt[n]{A} - a)}{\sqrt[n]{A} - a} =$$

$$a'' = \frac{\sqrt[n]{A} - a}{a a' + 1 - a' \sqrt[n]{A}} =$$

$$= a'' + \frac{\sqrt[n]{A} - a - (a a' + 1) a'' + a' a'' \sqrt[n]{A}}{a a' + 1 - a' \sqrt[n]{A}} = a'' + \frac{1}{x''}$$

$$a''' = \frac{a a' + 1 - a' \sqrt[n]{A}}{(a' a'' + 1) \sqrt[n]{A} - (a a' + 1) a'' - a}$$

$$= a''' + \frac{\{ a a' + 1 - a' \sqrt[n]{A} - (a' a'' + 1) a'' \sqrt[n]{A} \}}{(a' a'' + 1) \sqrt[n]{A} - (a a' + 1) a'' - a} = a''' + \frac{1}{x'''}$$

$$a^{IV} = \frac{(a' a'' + 1) \sqrt[n]{A} - (a a' + 1) a'' - a}{\{ (a a' + 1) a'' a''' + a a'' + 1 \} - [(a' a'' + 1) a'' + a'] \sqrt[n]{A}}$$

u. s. w.

Bis hieher ist immer  $x^{(n)} = \frac{\pm p^0 \mp q^0 \sqrt[n]{A}}{\mp p \pm q \sqrt[n]{A}} = \frac{\pm (p^0 - q^0 \sqrt[n]{A})}{\mp (p - q \sqrt[n]{A})} = \frac{p^0 - q^0 \sqrt[n]{A}}{q \sqrt[n]{A} - p}$

wobei die oberen Zeichen für die Näherungsbrüche ungerade Ordnung, die unteren für die Näherungsbrüche gerader Ordnung gelten. Diese Formel wird allgemein gültig sein, wenn der folgende vollständige Quotient  $x^{(n+1)} = \frac{\mp p \pm q \sqrt[n]{A}}{\pm p' \mp q' \sqrt[n]{A}}$  ist.

Dies wird aber folgendermassen bewiesen:

Denner.	Zähler.
$q^0$	$p^0$
$q$	$p$
$mq + q^0 = q'$	$mp + p^0 = p'$

$$x^{(n)} = \frac{\pm p^0 \mp q^0 \sqrt[n]{A}}{\mp p \pm q \sqrt[n]{A}} = m + \frac{\pm p^0 \mp q^0 \sqrt[n]{A} \pm mp \mp mq \sqrt[n]{A}}{\mp p \pm q \sqrt[n]{A}} = m + \frac{1}{x^{(n+1)}}$$

$$x^{(n+1)} = \frac{\mp p \pm q \sqrt[n]{A}}{\pm mp \pm p^0 \mp mq \sqrt[n]{A} \mp q^0 \sqrt[n]{A} \pm p' \mp q' \sqrt[n]{A}}$$

§. 11.

Es ist nun noch nachzuweisen, dass der hier gefundene Werth für  $x^{(n)}$  dem in §. 3. angegebenen gleich ist, dass also:

$$\frac{\pm p^0 \mp q^0 \sqrt[n]{A}}{\mp p \pm q \sqrt[n]{A}} = \frac{\left\{ \begin{array}{l} q^{n-2} \sqrt[n]{A}^{n-1} + q^{n-3} p \sqrt[n]{A}^{n-2} + q^{n-4} p^2 \sqrt[n]{A}^{n-3} + \dots \\ \dots + q^2 p^{n-4} \sqrt[n]{A}^3 + q p^{n-3} \sqrt[n]{A}^2 + p^{n-2} \sqrt[n]{A} \pm (p^0 p^{n-1} - q^0 q^{n-1} A) \end{array} \right\}}{\mp (p^n - q^n A)}$$

Die Reihe der irrationalen Grössen im Zähler dieser letzteren Formel ist aber eine geometrische Progression von  $n-1$  Gliedern. Das erste Glied derselben ist  $= q^{n-2} \sqrt[n]{A^{n-1}}$ , das letzte  $= p^{n-2} \sqrt[n]{A}$ , und der Exponent  $= \frac{p}{n}$ . Folglich ist die Summe der Glieder

$$\frac{\frac{p^{n-1}}{q} - q^{n-2} \sqrt[n]{A^{n-1}}}{\frac{p}{q \sqrt[n]{A}} - 1} = \frac{p^{n-1} - q^{n-1} \sqrt[n]{A^{n-1}}}{\frac{p}{\sqrt[n]{A}} - q} = \frac{p^{n-1} \sqrt[n]{A} - q^{n-1} A}{p - q \sqrt[n]{A}},$$

mithin :

$$x^{(n)} = \frac{\frac{p^{n-1} \sqrt[n]{A} - q^{n-1} A}{p - q \sqrt[n]{A}} \pm (p^0 p^{n-1} - q^0 q^{n-1} A)}{\mp (p^n - q^n A)}$$

$$= \frac{p^{n-1} \sqrt[n]{A} - q^{n-1} A \pm (p - q \sqrt[n]{A})(p^0 p^{n-1} - q^0 q^{n-1} A)}{\mp (p - q \sqrt[n]{A})(p^n - q^n A)}$$

Dieser letzte Ausdruck muss nun  $= \frac{\pm (p^0 - q^0 \sqrt[n]{A})}{\mp (p - q \sqrt[n]{A})}$  sein. Dann ist:

$$\pm (p^0 - q^0 \sqrt[n]{A})(p^n - q^n A)$$

$$= p^{n-1} \sqrt[n]{A} - q^{n-1} A \pm (p - q \sqrt[n]{A})(p^0 p^{n-1} - q^0 q^{n-1} A),$$

$$\pm p^0 p^n \mp p^0 q^n A \mp p^n q^0 \sqrt[n]{A} \pm q^0 q^n A \sqrt[n]{A}$$

$$= p^{n-1} \sqrt[n]{A} - q^{n-1} A \pm p^0 p^n \mp p q^0 q^{n-1} A \mp p^0 p^{n-1} q \sqrt[n]{A} \pm q^0 q^n A \sqrt[n]{A},$$

$$\mp p^0 q^n A \mp p^n q^0 \sqrt[n]{A} = -q^{n-1} A \mp p q^0 q^{n-1} A + p^{n-1} \sqrt[n]{A} \mp p^0 p^{n-1} q \sqrt[n]{A},$$

$$\pm (p q^0 - p^0 q) q^{n-1} A - p^{n-1} \sqrt[n]{A} = -q^{n-1} A \pm (p q^0 - p^0 q) p^{n-1} \sqrt[n]{A},$$

$$(p q^0 - p^0 q) q^{n-1} A \mp p^{n-1} \sqrt[n]{A} = \mp q^{n-1} A + (p q^0 - p^0 q) p^{n-1} \sqrt[n]{A}.$$

Diese letzte Gleichung ist aber richtig, weil  $p q^0 - p^0 q = \mp 1$ .

## §. 12.

Zahlenbeispiele, berechnet nach der Formel:

$$x^{(n)} = \frac{p^0 - q^0 \sqrt[n]{A}}{q \sqrt[n]{A} - p}$$

$x = \sqrt[3]{890} = 9,6190017 = 9 + \frac{1}{x'}$	0.	1
$x' = \frac{1}{\sqrt[3]{890} - 9} = \frac{1}{0,6190017} = 1 + \frac{1}{x''}$	1	9
$x'' = \frac{9 - \sqrt[3]{890}}{\sqrt[3]{890} - 10} = \frac{-0,6190017}{-0,3809983} = 1 + \frac{1}{x^m}$	1	10
$x^m = \frac{10 - \sqrt[3]{890}}{2\sqrt[3]{890} - 19} = \frac{0,3809983}{0,2380034} = 1 + \frac{1}{x^{IV}}$	2	19
$x^{IV} = \frac{19 - 2\sqrt[3]{890}}{3\sqrt[3]{890} - 29} = \frac{-0,2380034}{-0,1429949} = 1 + \frac{1}{x^V}$	3	29
$x^V = \frac{29 - 3\sqrt[3]{890}}{5\sqrt[3]{890} - 48} = \frac{0,1429949}{0,0950085} = 1 + \frac{1}{x^{VI}}$	5	48
$x^{VI} = \frac{48 - 5\sqrt[3]{890}}{8\sqrt[3]{890} - 77} = \frac{-0,0950085}{-0,0479864} = 1 + \frac{1}{x^{VII}}$	8	77
$x^{VII} = \frac{77 - 8\sqrt[3]{890}}{13\sqrt[3]{890} - 125} = \frac{0,0479864}{0,0470221} = 1 + \frac{1}{x^{VIII}}$	13	125
$x^{VIII} = \frac{125 - 13\sqrt[3]{890}}{21\sqrt[3]{890} - 202} = \frac{-0,0470221}{-0,0009643} = 48 + \frac{1}{x^{IX}}$	21	202
$x^{IX} = \frac{202 - 21\sqrt[3]{890}}{1021\sqrt[3]{890} - 9821} = \frac{0,0009643}{0,0007357} = 1 + \frac{1}{x^X}$	1021	9821
$x^X = \frac{9821 - 1021\sqrt[3]{890}}{1042\sqrt[3]{890} - 10023} = \frac{-0,0007357}{-0,0002286}$		
$= 3 + \frac{1}{x^{XI}}$	1042	10023
$x^{XI} = \frac{10023 - 1042\sqrt[3]{890}}{4147\sqrt[3]{890} - 39890} = \frac{0,0002286}{0,0000499}$		
$= 4 + \frac{1}{x^{XII}}$	4147	39890
	17630	169583



$x = \sqrt[7]{601} = 2,494492 =$	$2 + \frac{1}{x'}$	0	1
$x' = \frac{1}{\sqrt[7]{601} - 2} = \frac{1}{0,494492} =$	$2 + \frac{1}{x''}$	1	2
$x'' = \frac{2 - \sqrt[7]{601}}{2\sqrt[7]{601} - 5} = \frac{-0,494492}{-0,011016} =$	$44 + \frac{1}{x'''} =$	2	5
$x''' = \frac{5 - 2\sqrt[7]{601}}{89\sqrt[7]{601} - 222} = \frac{0,011016}{0,009788} =$	$1 + \frac{1}{x^{IV}} =$	89	222
$x^{IV} = \frac{222 - 89\sqrt[7]{601}}{91\sqrt[7]{601} - 227} = \frac{-0,009788}{-0,001228} =$	$7 + \frac{1}{x^V} =$	1	227
		726	1811
<hr/>			
$x = \sqrt[13]{10000} = 2,030918 =$	$2 + \frac{1}{x'}$	0	1
$x' = \frac{1}{\sqrt[13]{10000} - 2} = \frac{1}{0,030918} =$	$32 + \frac{1}{x''}$	1	2
$x'' = \frac{2 - \sqrt[13]{10000}}{32\sqrt[13]{10000} - 65} = \frac{-0,030918}{-0,010624} =$	$2 + \frac{1}{x'''} =$	32	65
$x''' = \frac{65 - 32\sqrt[13]{10000}}{65\sqrt[13]{10000} - 132} = \frac{0,010624}{0,009670} =$	$1 + \frac{1}{x^{IV}} =$	65	132
$x^{IV} = \frac{132 - 65\sqrt[13]{10000}}{97\sqrt[13]{10000} - 197} = \frac{-0,009670}{-0,000954} =$	$10 + \frac{1}{x^V} =$	97	197
		1035	2102

## §. 13.

Die Formel  $\frac{p^n - q^n \sqrt[n]{A}}{q \sqrt[n]{A} - p}$  ist freilich viel einfacher als die Hauptformel in

§. 3.; auch ist die Berechnung der Zahlenbeispiele nach derselben nicht so zeitraubend wie das in §. 8. angegebene Verfahren. Diese Berechnung ist aber, wie sich aus der Betrachtung der Beispiele in §. 12. ergibt, fast werthlos, und zwar aus folgenden Gründen:

1. Um nach der Formel  $\frac{p^n - q^n \sqrt[n]{A}}{q \sqrt[n]{A} - p}$  eine irrationale Grösse in einen

Kettenbruch zu verwandeln, muss vorher der Werth dieser Grösse in anderer Weise ermittelt werden, und zwar ziemlich genau, weil sonst die Berechnung leicht geradezu unmöglich wird, indem sich negative Zahlen als Kettenbruchennenner ergeben, wovon man durch einen Versuch sich überzeugen kann.

2. Durch vorstehende Berechnung sind eigentlich nicht die irrationalen Grössen  $\sqrt[8]{890}$ ,  $\sqrt[7]{601}$  und  $\sqrt[13]{10000}$ , sondern nur die endlichen Zahlen 9,6190017, 2,494492 und 2,030918 in Kettenbrüche verwandelt worden.

3. Diese Berechnungsweise ist von dem gewöhnlichen Verfahren, einen gemeinen Bruch in einen Kettenbruch zu verwandeln, gar nicht verschieden. wie der Augenschein lehrt.

**Berichtigungen zu dem Aufsatze Nr. VIII. des Herrn Koutny in  
Brünn in diesem Hefte.**

- S. 51. letzte Zeile: Hinter der letzten grossen Klammer ] fehlt eine erhöhte 2 (Quadrat) und ist also zu setzen ]<sup>2</sup>.
- S. 56. Z. 5. v. o. statt  $p$  im Zähler des ersten Bruchs s. m.  $p^2$ .
- S. 58. Z. 23. v. o. statt „Letzteren“ s. m. „letzteren.“
- S. 59. Z. 11. v. o. statt  $\frac{q^2}{a^2 - b^2}$  s. m.  $\frac{q^2 c^2}{a^2 - b^2}$ .
- S. 61. Z. 5. v. u. statt „Letzteren“ s. m. „letzteren.“
- S. 62. Z. 3. v. u. statt  $\frac{Bp}{b^2}$  s. m.  $\frac{Bq}{b^2}$ .
- S. 63. Z. 7. v. u. statt  $\frac{r^2}{c^3}$  s. m.  $\frac{r^2}{c^4}$ .
- S. 65. Z. 5. v. u. Die Nummer (17) gehört zur vorhergehenden Gleichung  $\frac{\varphi^2}{\varphi^2 - 1} = \text{etc.}$  in Z. 7. v. u.
- S. 68. Z. 9. v. o. statt „ $-\varphi^2$ “ s. m. „ $=\varphi^2$ .“
- S. 68. Z. 8. v. u. Im Nenner des grossen Bruchs am Ende desselben s. m. „ $a^2 \varepsilon_2^4$ “ an die Stelle von „ $a^2 \varepsilon_1^4$ .“
- S. 69. Z. 8. v. o. In dem Nenner des grossen Bruchs zu Anfange desselben s. m. „ $\varepsilon_1^2 \varepsilon_2^2$ “ statt „ $c^2 \varepsilon_1^2 \varepsilon_2^2$ “; man tilge also  $c^2$ .
- S. 74. Z. 8. v. u. statt „dem Ellipsoide“ s. m. „der Kugel.“
- S. 76. Z. 7. v. o. statt „in vertikalen Diametralebenen“ s. m. „in der vertikalen Diametralebene.“
- S. 76. Z. 8. v. o. statt „ $O'C'$ “ s. m. „ $O''C''$ .“
- S. 76. Z. 18. v. o. statt „Radius“ s. m. „Durchmesser.“
- S. 76. Z. 20. v. o. statt „benutzen“ s. m. „benützen.“
- S. 77. Z. 15. v. o. statt „parallel  $\gamma \varepsilon_1$ “ s. m. „parallel zu  $\gamma \varepsilon_1$ .“
- S. 78. Z. 7. v. u. statt „ebenfalls“ s. m. „allenfalls.“
- S. 78. Z. 5. v. u. statt „Benutzung“ s. m. „Benützung.“
- S. 78. Z. 3. v. u. statt  $p$  s. m.  $P$ .
- S. 79. Z. 4. v. o. statt  $p$  s. m.  $P$ .

Auf der Figurentafel IV. fehlt in der Figur auf der linken Seite der unteren Hälfte an den Durchschnittspunkten der Linien  $O'G$  und  $O'F$  mit der äussersten elliptischen Umfangsline der Buchstabe  $r$ .

Diese im Archiv sonst ganz ungewöhnliche grössere Anzahl von Berichtigungen, welche übrigens bei Weitem dem grössten Theile nach nicht auf Rechnung der Druckerei und des Correctors kommt, ist leider entstanden, weil wegen der durch den Krieg, während welches der betreffende Aufsatz gedruckt wurde, eine Zeit lang völlig unterbrochenen Communication — in Folge eingezogener Nachrichten — eine letzte Correctur nach Brünn sicher zu senden ganz unmöglich war.

G.

















Folglich sind für  $q = 1$  die Strecken, welche zwischen den auf derselben Seite des Urdreiecks abgetragenen Theilpunkten liegen, doppelt so gross als der Abstand des Berührungspunktes des in das Urdreieck eingeschriebenen Kreises von der Dreiecksspitze, welche der betreffenden Seite gegenüberliegt.

e) Ist  $r$  der Radius des eingeschriebenen Kreises, so ist bekanntlich:

$$x = r \cdot \operatorname{ctg} \frac{1}{2}A, \quad y = r \cdot \operatorname{ctg} \frac{1}{2}B, \quad z = r \cdot \operatorname{ctg} \frac{1}{2}C;$$

also ist:

$$\begin{aligned} DF \cdot HE \cdot GJ &= 8r^3 \operatorname{ctg} \frac{1}{2}A \cdot \operatorname{ctg} \frac{1}{2}B \cdot \operatorname{ctg} \frac{1}{2}C \\ &= 8r^3 (\operatorname{ctg} \frac{1}{2}A + \operatorname{ctg} \frac{1}{2}B + \operatorname{ctg} \frac{1}{2}C). \end{aligned}$$

f) Es ist aber auch für  $q = 1$  (Taf. V. Fig. 3.)  $BN = BF + \frac{1}{2}DF = a - b + \frac{1}{2}(-a + b + c) = \frac{1}{2}(a - b + c)$  und  $CN = \frac{1}{2}(a + b - c)$ ; ebenso  $AP = AG - \frac{1}{2}GJ = \frac{1}{2}(-a + b + c)$  und  $BP = \frac{1}{2}(a - b + c)$ ; desgleichen  $CO = AE - \frac{1}{2}HE = \frac{1}{2}(a + b - c)$  und  $AO = \frac{1}{2}(-a + b + c)$ ; folglich treffen die Höhen der gleichschenkeligen Dreiecke (für  $q = 1$ ) in die Berührungspunkte des Kreises, welcher in das Urdreieck eingeschrieben ist.

g) Es ist also (nach c)) für  $q = 1$ , wie allerdings auch schon aus d) folgt:

$$KN = x \cdot \operatorname{tg} A,$$

$$LO = y \cdot \operatorname{tg} B,$$

$$MP = z \cdot \operatorname{tg} C;$$

d. h. die Höhen der drei gleichschenkeligen Dreiecke sind, wenn man die ganzen Dreiecksseiten selbst abgetragen hat, gleich den Normalen, welche man in den Berührungspunkten des eingeschriebenen Kreises auf einer der beiden Seiten, auf welchen die Grundseite des betreffenden gleichschenkeligen Dreiecks nicht liegt, errichtet und bis zum Durchschnitte mit der anderen Seite verlängert. Es ist also in Taf. V. Fig. 3.:

$$KN = PX' = OX''; \quad LO = NY' = PY''; \quad MP = OZ' = NZ''.$$

h) Aus f) folgt, dass für  $q = 1$  die Höhen der gleichschenkeligen Dreiecke sich in dem Mittelpunkte des Kreises schneiden, welcher in das Urdreieck eingeschrieben ist.

i) Hieraus folgt, dass man den Mittelpunkt des in ein Dreieck eingeschriebenen Kreises finden kann, wenn man auf zwei Dreiecksseiten die beiden anliegenden abschneidet, die zwischen den beiden Theilpunkten liegende Strecke halbirt und in den so







salen des Dreiecks  $KLM$ , welche die Winkel, respective die Aussenwinkel desselben halbiren, da sie von den Spitzen der gleichschenkeligen Dreiecke auf deren Grundseiten gefällt sind. Folglich ist ihr gemeinschaftlicher Durchschnittspunkt  $R$  der Mittelpunkt eines Berührungskreises des Dreiecks  $KLM$  und zwar des inneren, wenn  $R$  innerhalb des Dreiecks liegt, oder eines äusseren, wenn  $R$  ausserhalb seine Stelle hat.

**Zusatz 3.** Für  $q=1$  wird  $R$  Mittelpunkt 1) des in  $\triangle ABC$  eingeschriebenen Kreises; 2) des in  $\triangle KLM$  eingeschriebenen; 3) da (Taf. V. Fig. 3.) wegen  $KN=PX'=OX''$  auch  $KR=RX'=RX''$  wird, des um  $\triangle KX'X''$  beschriebenen; ebenso 4) des um  $\triangle LY'Y''$  und 5) des um  $\triangle MZ'Z''$  beschriebenen, da  $RL=RY'=RY''$  ist wegen  $LO=NY'=PY''$  und  $RM=RZ'=RZ''$  wegen  $MP=OZ'=NZ''$ .

**Zusatz 4.** Der Abstand des Punktes  $R$  von einer Dreiecksseite ist gleich der Summe aus dem  $q$ ten Theile des Abstandes des Mittelpunktes des eingeschriebenen Kreises (also  $qr$ ) und dem  $(1-q)$ ten Theile des Abstandes des Mittelpunktes des umschriebenen Kreises von derselben Seite.

Es ist nämlich:

$$RN = \frac{BP - BN \cdot \cos B}{\sin B} = \frac{CO - CN \cdot \cos C}{\sin C},$$

$$RO = \frac{NC - CO \cdot \cos C}{\sin C} = \frac{AP - AO \cdot \cos A}{\sin A},$$

$$RP = \frac{AO - AP \cdot \cos A}{\sin A} = \frac{BN - BP \cdot \cos B}{\sin B} \text{ (s. in 12.)};$$

also mit Berücksichtigung von 10. und weil  $a = b \cos C + c \cos B$  u.s.w.

$$\begin{aligned} RN &= \frac{(a - b + c)(1 - \cos B) - (1 - q)b(\cos B + \cos C - 1)}{2 \sin B} \\ &= \frac{(a + b - c)(1 - \cos C) - (1 - q)c(\cos B + \cos C - 1)}{2 \sin C} \\ &= \frac{1}{2}(a - b + c) \operatorname{tgs} \frac{1}{2}B - \frac{(1 - q)b(\cos B + \cos C - 1)}{2 \sin B} \\ &= \frac{1}{2}(a + b - c) \operatorname{tgs} \frac{1}{2}C - \frac{(1 - q)c(\cos B + \cos C - 1)}{2 \sin C}. \end{aligned}$$

Ähnliche Werthe ergeben sich für  $RO$  und  $RP$ ; da aber

$$r = \frac{1}{2}(-a + b + c) \operatorname{tgs} \frac{1}{2}A = \frac{1}{2}(a - b + c) \operatorname{tgs} \frac{1}{2}B = \frac{1}{2}(a + b - c) \operatorname{tgs} \frac{1}{2}C$$



also:

$$\begin{aligned} \text{d) } KN.LO.MP:abc &= r.tgsA.tgsB.tgsC:4R \\ &= r.\sin A.\sin B.\sin C:4R.\cos A.\cos B.\cos C. \end{aligned}$$

14. Für die gleichen Seiten der gleichschenkeligen Dreiecke (9. b)) erhält man allgemein:

$$KD = \frac{1}{2}(-a + qb + qc) \sec A = \left[ \frac{1}{2}(-a + b + c) - \frac{1-q}{2}(b + c) \right] \sec A;$$

$$LH = \frac{1}{2}(qa - b + qc) \sec B = \left[ \frac{1}{2}(a - b + c) - \frac{1-q}{2}(a + c) \right] \sec B;$$

$$MG = \frac{1}{2}(qa + qb - c) \sec C = \left[ \frac{1}{2}(a + b - c) - \frac{1-q}{2}(a + b) \right] \sec C.$$

Also ist:

$$\begin{aligned} & KD.LH.MG \\ &= \frac{(-a + qb + qc)(qa - b + qc)(qa + qb - c)}{8 \cos A. \cos B. \cos C} \\ &= - \frac{(-a + qb + qc)(qa - b + qc)(qa + qb - c)}{2(1 + \cos 2A + \cos 2B + \cos 2C)} \\ &= \frac{(-a + qb + qc)(qa - b + qc)(qa + qb - c)}{8(\sin A. \sin B. \cos C + \sin A. \sin C. \cos B + \sin B. \sin C. \cos A - 1)}. \end{aligned}$$

Also für  $q = 1$ :

$$KD.LH.MG = \frac{(-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c)}{8 \cos A. \cos B. \cos C}$$

u. s. w.

$$\begin{aligned} &= \frac{2\Delta^2}{(a + b + c) \cos A. \cos B. \cos C} \\ &= \frac{\Delta r}{\cos A. \cos B. \cos C} = \frac{1}{4} abc \frac{r}{R} \cdot \frac{1}{\cos A. \cos B. \cos C} \end{aligned}$$

u. s. w.

Also:

$$KD.LH.MG:abc = r:4R.\cos A.\cos B.\cos C.$$

15. Die Entfernungsortsstrecken  $HJ$ ,  $FG$  und  $DE$  haben im Allgemeinen folgende Werthe:



$$\begin{aligned}
 BJ^2 &= AJ^2 + AH^2 + 2AJ \cdot AH \cdot \cos A \\
 &= (qa - c)^2 + (b - qa)^2 + 2(qa - c)(b - qa) \cos A \\
 &= a^2 - 2qa(-qa + b + c)(1 - \cos A) \\
 &= a^2 - 4qa(-qa + b + c) \sin^2 \frac{1}{2}A \\
 &= a^2 - \frac{qa}{bc} (-qa + b + c)(a - b + c)(a + b - c) \\
 &= a^2 - \frac{qa}{bc} [(-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c) + (1 - q)a(a - b + c)(a + b - c)] \\
 &= \frac{a^2 b^2 c^2 - qabc(-qa + b + c)(a - b + c)(a + b - c)}{b^2 c^2} \\
 &= \frac{a}{bc} [abc - q(-qa + b + c)(a - b + c)(a + b - c)] \\
 &= \frac{(y + z)^2 [(x + y)(x + z)(y + z) - 4q(1 - q)yz(y + z) - 8qxyz]}{(x + y)(x + z)(y + z)} \text{ (s. 9.d)}.
 \end{aligned}$$

Ebenso:

$$\begin{aligned}
 FG^2 &= b^2 - 2qb(a - qb + c)(1 - \cos B) \\
 &= b^2 - 4qb(a - qb + c) \sin^2 \frac{1}{2}B \\
 &= b^2 - \frac{qb}{ac} (a - qb + c)(-a + b + c)(a + b - c) \\
 &= \frac{a^2 b^2 c^2 - qabc(a - qb + c)(-a + b + c)(a + b - c)}{a^2 c^2} \\
 &= \frac{b}{ac} [abc - q(-a + b + c)(a - qb + c)(a + b - c)] \\
 &= \frac{(x + z)^2 [(x + y)(x + z)(y + z) - 4q(1 - q)xz(x + z) - 8qxyz]}{(x + y)(x + z)(y + z)}.
 \end{aligned}$$

Desgleichen:

$$\begin{aligned}
 DE^2 &= c^2 - 2qc(a + b - qc)(1 - \cos C) \\
 &= c^2 - 4qc(a + b - qc) \sin^2 \frac{1}{2}C \\
 &= c^2 - \frac{qc}{ab} (a + b - qc)(-a + b + c)(a - b + c) \\
 &= \frac{a^2 b^2 c^2 - qabc(-a + b + c)(a - b + c)(a + b - qc)}{a^2 b^2} \\
 &= \frac{c}{ab} [abc - q(-a + b + c)(a - b + c)(a + b - qc)] \\
 &= \frac{(x + y)^2 [(x + y)(x + z)(y + z) - 4q(1 - q)xy(x + y) - 8qxyz]}{(x + y)(x + z)(y + z)}.
 \end{aligned}$$

**Zusatz 1.** Im Allgemeinen ist also:

$$HJ^2:FG^2 = a^2[abc - q(-qa + b + c)(a - b + c)(a + b - c)] \\ : b^2[abc - q(-a + b + c)(a - qb + c)(a + b - c)],$$

$$FG^2:DE^2 = b^2[abc - q(-a + b + c)(a - qb + c)(a + b - c)] \\ : c^2[abc - q(-a + b + c)(a - b + c)(a + b - qc)],$$

$$DE^2:HJ^2 = c^2[abc - q(-a + b + c)(a - b + c)(a + b - qc)] \\ : a^2[abc - q(-qa + b + c)(a - b + c)(a + b - c)].$$

**Zusatz 2.** Für  $q = 1$  ist daher:

$$HJ:FG:DE = a:b:c.$$

**Zusatz 3.** Speziell ergeben sich, wenn  $q = 1$  ist, folgende Werthe:

$$\begin{aligned} HJ^2 &= a^2 - 2a(-a + b + c)(1 - \cos A), \\ &= a^2 - 4a(-a + b + c)\sin^2 \frac{1}{2}A, \\ &= a^2 - \frac{a}{bc}(-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c), \\ &= \frac{a^2b^2c^2 - abc(-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c)}{b^2c^2}, \\ &= \frac{a}{bc}[abc - (-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c)], \\ &= \frac{a}{bc}(abc - DF \cdot HE \cdot GJ) \dots \dots (\text{s. 9. d.}) \\ &= a^2 - \frac{16a\Delta^2}{bc(a + b + c)}, \\ &= a^2 \left(1 - \frac{4\Delta}{(a + b + c)R}\right), \\ &= a^2 \left(1 - \frac{2r}{R}\right), \\ &= \frac{4a}{bc}(R\Delta - 2r^3 \operatorname{ctg} \frac{1}{2}A \cdot \operatorname{ctg} \frac{1}{2}B \cdot \operatorname{ctg} \frac{1}{2}C), \\ &= \frac{4a}{bc}[R\Delta - 2r^3(\operatorname{ctg} \frac{1}{2}A + \operatorname{ctg} \frac{1}{2}B + \operatorname{ctg} \frac{1}{2}C)], \\ &= \frac{a}{bc}(abc - 8xyz), \\ &= a^2 - \frac{8xyz(y + z)}{(x + y)(x + z)}, \\ &= \frac{(y + z)^2[(x + y)(x + z)(y + z) - 8xyz]}{(x + y)(x + z)(y + z)}. \end{aligned}$$

**Ebenso:**

$$\begin{aligned}
 FG^2 &= b^2 - 2b(a - b + c)(1 - \cos B), \\
 &= b^2 - 4b(a - b + c)\sin^2 \frac{1}{2}B, \\
 &= b^2 - \frac{b}{ac}(-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c), \\
 &= \frac{a^2b^2c^2 - abc(-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c)}{a^2c^2}, \\
 &= \frac{b}{ac}[abc - (-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c)], \\
 &= \frac{b}{ac}(abc - DF \cdot HE \cdot GJ), \\
 &= b^2 - \frac{16b\Delta^2}{ac(a + b + c)}, \\
 &= b^2 \left(1 - \frac{4\Delta}{(a + b + c)R}\right), \\
 &= b^2 \left(1 - \frac{2r}{R}\right), \\
 &= \frac{4b}{ac}(R\Delta - 2r^3 \operatorname{ctg} \frac{1}{2}A \cdot \operatorname{ctg} \frac{1}{2}B \cdot \operatorname{ctg} \frac{1}{2}C), \\
 &= \frac{4b}{ac}[R\Delta - 2r^3(\operatorname{ctg} \frac{1}{2}A + \operatorname{ctg} \frac{1}{2}B + \operatorname{ctg} \frac{1}{2}C)], \\
 &= \frac{b}{ac}(abc - 8xyz), \\
 &= b^2 - \frac{8xyz(x + z)}{(x + y)(y + z)}, \\
 &= \frac{(x + z)^2[(x + y)(x + z)(y + z) - (8xyz)]}{(x + y)(x + z)(y + z)}.
 \end{aligned}$$

**Dessgleichen:**

$$\begin{aligned}
 DE^2 &= c^2 - 2c(a + b - c)(1 - \cos C), \\
 &= c^2 - 4c(a + b - c)\sin^2 \frac{1}{2}C, \\
 &= c^2 - \frac{c}{ab}(-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c), \\
 &= \frac{a^2b^2c^2 - abc(-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c)}{a^2b^2}, \\
 &= \frac{c}{ab}[abc - (-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c)], \\
 &= \frac{c}{ab}(abc - DF \cdot HE \cdot GJ),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= c^2 - \frac{16c\Delta^2}{ab(a+b+c)}, \\
&= c^2 \left(1 - \frac{4\Delta}{(a+b+c)R}\right), \\
&= c^2 \left(1 - \frac{2r}{R}\right), \\
&= \frac{4c}{ab} (R\Delta - 2r^3 \operatorname{ctg} \frac{1}{2}A \cdot \operatorname{ctg} \frac{1}{2}B \cdot \operatorname{ctg} \frac{1}{2}C), \\
&= \frac{4c}{ab} [R\Delta - 2r^3 (\operatorname{ctg} \frac{1}{2}A + \operatorname{ctg} \frac{1}{2}B + \operatorname{ctg} \frac{1}{2}C)], \\
&= \frac{c}{ab} (abc - 8xyz), \\
&= c^2 - \frac{8xyz(x+y)}{(x+z)(y+z)}, \\
&= \frac{(x+y)^2 [(x+y)(x+z)(y+z) - 8xyz]}{(x+y)(x+z)(y+z)}.
\end{aligned}$$

Zusatz 4. a) Ist  $a > b > c$  und wird  $qb + qc = a$ , also  $q = \frac{a}{b+c}$ , so fallen  $D$  und  $F$  zusammen und es wird:

$$\begin{aligned}
HJ^2 &= a^2 - \frac{2a^3(a+b+c)(-a+b+c)(1-\cos A)}{(b+c)^3}, \\
&= a^2 \left(1 - \frac{16\Delta^2}{bc(b+c)^2}\right)
\end{aligned}$$

u. s. w.

$$\begin{aligned}
FG^2 \text{ oder } DG^2 &= b^2 - \frac{2abc(a+b+c)(1-\cos B)}{(b+c)^3}, \\
&= b^2 \left(1 - \frac{16\Delta^2}{b(a-b+c)(b+c)^2}\right),
\end{aligned}$$

u. s. w.,

$$\begin{aligned}
DE^2 &= c^2 - \frac{2abc(a+b+c)(1-\cos C)}{(b+c)^3}, \\
&= c^2 \left(1 - \frac{16\Delta^2}{c(a+b-c)(b+c)^2}\right),
\end{aligned}$$

u. s. w.

b) Ist  $a > b > c$  und  $qc + qa = b$ , also  $q = \frac{b}{a+c}$ , so fallen  $H$  und  $E$  zusammen und es wird:

$$HJ^2 = a^2 - \frac{2abc(a+b+c)(1-\cos A)}{(a+c)^2},$$

$$= a^2 \left(1 - \frac{16\Delta^2}{a(-a+b+c)(a+c)^2}\right);$$

$$FG^2 = b^2 - \frac{2b^2(a+b+c)(a-b+c)(1-\cos B)}{(a+c)^2},$$

$$= b^2 \left(1 - \frac{16\Delta^2}{ac(a+c)^2}\right);$$

$$DE^2 = c^2 - \frac{2abc(a+b+c)(1-\cos C)}{(a+c)^2},$$

$$= c^2 \left(1 - \frac{16\Delta^2}{c(a+b-c)(a+c)^2}\right).$$

c) Ist  $a > b > c$  und  $qa + qb = c$ , also  $q = \frac{c}{a+b}$ , so fallen  $u$  und  $G$  zusammen und man erhält:

$$HJ^2 = a^2 - \frac{2abc(a+b+c)(1-\cos A)}{(a+b)^2},$$

$$= a^2 \left(1 - \frac{16\Delta^2}{a(-a+b+c)(a+b)^2}\right);$$

$$FG^2 = b^2 - \frac{2abc(a+b+c)(1-\cos B)}{(a+b)^2},$$

$$= b^2 \left(1 - \frac{16\Delta^2}{b(a-b+c)(a+b)^2}\right);$$

$$DE^2 = c^2 - \frac{2c^2(a+b+c)(a+b-c)(1-\cos C)}{(a+b)^2},$$

$$= c^2 \left(1 - \frac{16\Delta^2}{ab(a+b)^2}\right).$$

Es tritt dies z. B. ein bei Dreiecken mit folgenden Werthen:

$a$	$b$	$c$	$q = \frac{a}{b+c}$	$q = \frac{b}{a+c}$	$q = \frac{c}{a+b}$
4	3	2	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{2}{7}$
5	4	2	$\frac{5}{6}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$
5	4	3	$\frac{5}{7}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{3}{12}$
6	4	3	$\frac{6}{7}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$
6	5	2	$\frac{6}{7}$	$\frac{5}{11}$	$\frac{2}{11}$
6	5	3	$\frac{6}{8}$	$\frac{5}{11}$	$\frac{3}{11}$
6	5	4	$\frac{6}{9}$	$\frac{5}{11}$	$\frac{4}{11}$

Die Theilpunkte der Entfernungsortsstrecke sind zweckmäßig zu berechnen. Die Theilpunkte auf den Seiten  $a, b, c$  sind  $a, b, c$  angenommen.

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},$$

oder

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac},$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab},$$

$$\sin A = \frac{a}{2R},$$

$$\sin B = \frac{b}{2R},$$

$$\sin C = \frac{c}{2R}.$$

oder auch die folgenden Formeln:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac},$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab},$$

$$\sin A = \frac{a}{2R},$$

$$\sin B = \frac{b}{2R},$$

$$\sin C = \frac{c}{2R}.$$

Ist  $q < a, b, c$  erhalten die  $\cos$  und  $\sin$  dieser Winkel sämmtlich den entgegengesetzten Werth, denn es liegen dann sämmtliche Theilpunkte auf den Verlängerungen der Seiten. Liegt

Ein Endpunkt einer Entfernungsortstrecke auf einer Seite des Dreiecks selbst, der andere aber auf der Verlängerung der anderen Seite, so bleibt für den Winkel, dessen Scheitelpunkt auf der Seite selbst liegt, der Cosinus unverändert, aber der Sinus erhält den entgegengesetzten Werth, während für den Winkel, dessen Scheitelpunkt auf der Verlängerung liegt, es umgekehrt ist, nämlich der Sinus unverändert bleibt, aber der Cosinus den entgegengesetzten Werth erhält.

Aus obigen Werthen folgt:

$$\begin{aligned} & \cos AJH : \cos BGF \\ &= a(q \cos A + \cos B - q)FG : b(\cos A + q \cos B - q)HJ, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \cos CED : \cos AHJ \\ &= c(q \cos C + \cos A - q)HJ : a(\cos C + q \cos A - q)DE, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \cos BFG : \cos CDE \\ &= b(q \cos B + \cos C - q)DE : c(\cos B + q \cos C - q)FG; \end{aligned}$$

folgt:

$$\sin AJH : \sin BGF = a(\sin B - q \sin A)FG : b(\sin A - q \sin B)HJ,$$

$$\sin CED : \sin AHJ = c(\sin A - q \sin C)HJ : a(\sin C - q \sin A)DE,$$

$$\sin BFG : \sin CDE = b(\sin C - q \sin B)DE : c(\sin B - q \sin C)FG.$$

18. Da nun für  $q = 1$  (15. Zus. 2.)  $HJ : FG : DE = a : b : c$  ist, so wird in diesem Falle:

$$\cos AJH = \cos BGF, \sin AJH = -\sin BGF;$$

$$\cos CED = \cos AHJ, \sin CED = -\sin AHJ;$$

$$\cos BFG = \cos CDE, \sin BFG = -\sin CDE.$$

In diesem Falle liegen, wenn das Dreieck ungleichseitig und wenn  $a > b > c$  ist, die Theilpunkte  $D$ ,  $E$  und  $F$  auf den Seiten selbst, aber  $G$ ,  $H$  und  $J$  auf den Verlängerungen. Es sind also  $\cos AJH$  und  $\cos BGF$  gleich und gleichbezeichnet ( $-$ );  $\sin AJH$  ( $-$ ) und  $\sin BGF$  ( $+$ ) gleich, aber entgegengesetzt bezeichnet;  $\cos CED$  ( $+$ ) und  $\cos AHJ$  ( $-$ ) gleich, aber entgegengesetzt bezeichnet;  $\sin CED$  ( $+$ ) und  $\sin AHJ$  ( $-$ ) ebenfalls; endlich  $\cos BFG$  ( $+$ ) und  $\cos CDE$  ( $+$ ) beide gleich und gleich bezeichnet;  $\sin BFG$  ( $-$ ) und  $\sin CDE$  ( $+$ ) gleich, aber entgegengesetzt bezeichnet. Es sind daher  $\angle AJH$  und  $\angle BGF$  gleiche

innere Wechselwinkel;  $\angle BFG$  und  $\angle CDE$  gleiche äußere Wechselwinkel;  $\angle CDE$  und  $\angle AHJ$  verschränkte Winkel, zusammen  $180^\circ$  betragen. Folglich laufen die drei Entfernungsortsstrecken für  $q = 1$  parallel.

17. Nach 15. Zus. 3 ist für  $q = 1$   $HJ^2 = a^2 \left(1 - \frac{2r}{R}\right)$ ,  $FG^2 = b^2 \left(1 - \frac{2r}{R}\right)$  und  $DE^2 = c^2 \left(1 - \frac{2r}{R}\right)$ . Ist  $r = \frac{1}{2}R$ , so das Dreieck gleichseitig. Dann sind die Entfernungsortsstrecken  $= (1-q)a$ . — Ist  $\frac{2r}{R} = \frac{3}{4}$ , also  $r = \frac{3}{8}R$ , so wird  $HJ = FG = \frac{1}{2}b$  und  $DE = \frac{1}{2}c$ .

Es führt dies zu interessanten Lösungen von Dreiecksaufgaben, z. B. ein gleichschenkeliges Dreieck zu construiren, welchem  $r = \frac{1}{2}R$  ist, dergleichen ein ungleichseitiges Dreieck, wenn noch irgend eine Bestimmung gegeben ist. Doch es wäre wohl Zeit abzubrechen und behalte ich mir daher eine weitläufige Ausführung noch vor.



## **XI.**

**Goniometrischer Beweis der von Herrn Dr. Lindman  
in Strengnäs Archiv Th. XLV. Nr. XVII. S. 348.  
mitgetheilten Relationen.**

Von

**Herrn C. Thiel,**

**Kandidaten der Mathematik in Greifswald.**

---

### **Vorerinnerung des Herausgebers.**

In Bezug auf die folgenden Entwicklungen des Herrn Thiel erlaube ich mir zu bemerken, dass Herr Doctor Lindman in Strengnäs in einem, wie immer, überaus freundlichen Briefe, für den ich ihm hier meinen besten Dank ausspreche, mir rücksichtlich des von mir in Thl. XLV. S. 348. Note \*) ausgesprochenen Wunsches u. A. auch die folgende Mittheilung machte:

„Ut voluntati tuae satisfaciam, ejusmodi demonstrationem more goniometricam dare propero. E formula notissima

$$\sin 3a = 3 \sin a - 4 \sin^3 a$$

prodit

$$3 \sin 20^\circ - 4 \sin^3 20^\circ = \sin 60^\circ$$

vel

$$(3 - 4 \sin^2 20^\circ) \sin 20^\circ = \sin 60^\circ.$$

Quum vero sit  $\sin^2 60^\circ = \frac{3}{4}$ , haec formula transit in

$$4(\sin^2 60^\circ - \sin^2 20^\circ) \sin 20^\circ = \sin 60^\circ,$$

unde beneficio formulae  $\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta = \sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta)$  reperitur

$$4 \sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 80^\circ = \sin 60^\circ$$

et multiplicatione per  $4 \sin 60^\circ$  facta,

$$16 \sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 60^\circ \sin 80^\circ = 4 \sin^2 60^\circ = 3. \quad \text{q. e. d.}$$

*Nota a d IV. Kal. Octobr. Strengn.*

Nun man in der bekannten Formel

$$\sin \varphi + \sin \psi = 2 \sin \frac{1}{2}(\varphi + \psi) \cos \frac{1}{2}(\varphi - \psi) \quad (1)$$

für  $\varphi = 40^\circ$ , so ist:

$$\sin 20^\circ + \sin 40^\circ = 2 \sin 30^\circ \cos(-10^\circ),$$

da  $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ ,  $\cos(-10^\circ) = \cos 10^\circ = \sin 80^\circ$  ist:

$$\sin 20^\circ + \sin 40^\circ = \sin 80^\circ.$$

Nun man ferner in der Formel

$$\cos \varphi = -2 \sin \frac{1}{2}(\varphi + \psi) \sin \frac{1}{2}(\varphi - \psi) \quad (2)$$

für  $\varphi = 40^\circ$ , so ist  $\varphi = 20^\circ$ ,  $\psi = 60^\circ$ , also

$$\cos 40^\circ = -2 \sin 40^\circ \sin(-20^\circ),$$

da  $\sin(-20^\circ) = -\sin 20^\circ$  ist:

$$\cos 20^\circ \sin 40^\circ = \cos 20^\circ - \frac{1}{2}.$$

Man multipliziert nun beiden Seiten mit  $4 \sin 80^\circ$ , so ist:

$$4 \sin 80^\circ \cos 20^\circ \sin 40^\circ = 4 \sin 80^\circ \cos 20^\circ - 2 \sin 80^\circ.$$

Da  $\frac{1}{2}(\varphi + \psi) = 80^\circ$ ,  $\frac{1}{2}(\varphi - \psi) = 20^\circ$ , so ist

$$\sin 40^\circ + \sin 60^\circ = 2 \sin 80^\circ \cos 20^\circ,$$

$$\sin 40^\circ + \sin 60^\circ = 2 \sin 100^\circ + 2 \sin 60^\circ - 2 \sin 80^\circ.$$

$$\sin 100^\circ - \sin 80^\circ, \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \sqrt{3}:$$

$$\sin 40^\circ + \sin 60^\circ \sin 80^\circ = \sqrt{3}.$$

Multipliziert man noch mit  $2\sin 60^\circ = \sqrt{3}$ , so ergibt sich

$$\text{III.} \dots\dots\dots 16\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 60^\circ \sin 80^\circ = 3.$$

Es war:

$$-2\sin 20^\circ \sin 40^\circ = \frac{1}{2} - \cos 20^\circ. \quad (\text{a})$$

Setzt man ferner in (2)  $\frac{1}{2}(\varphi + \psi) = 40^\circ$ ,  $\frac{1}{2}(\varphi - \psi) = 80^\circ$ , so ist  $\varphi = 120^\circ$ ,  $\psi = -40^\circ$ , also:

$$\cos 120^\circ - \cos(-40^\circ) = -2\sin 40^\circ \sin 80^\circ,$$

oder, weil  $\cos 120^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$ ,  $\cos(-40^\circ) = \cos 40^\circ$  ist:

$$2\sin 40^\circ \sin 80^\circ = \frac{1}{2} + \cos 40^\circ. \quad (\text{b})$$

Setzt man endlich in (2)  $\frac{1}{2}(\varphi + \psi) = 80^\circ$ ,  $\frac{1}{2}(\varphi - \psi) = 20^\circ$ , so ist  $\varphi = 100^\circ$ ,  $\psi = 60^\circ$ , also

$$\cos 100^\circ - \cos 60^\circ = -2\sin 80^\circ \sin 20^\circ,$$

oder, weil  $\cos 100^\circ = -\cos 80^\circ$ ,  $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$  ist:

$$2\sin 80^\circ \sin 20^\circ = \frac{1}{2} + \cos 80^\circ. \quad (\text{c})$$

Addirt man (a), (b) und (c), so ist:

$$\begin{aligned} 2(-\sin 20^\circ \sin 40^\circ + \sin 40^\circ \sin 80^\circ + \sin 80^\circ \sin 20^\circ) \\ = \frac{3}{2} + (-\cos 20^\circ + \cos 40^\circ + \cos 80^\circ). \end{aligned}$$

Nach der Formel:

$$\cos \varphi + \cos \psi = 2\cos \frac{1}{2}(\varphi + \psi)\cos \frac{1}{2}(\varphi - \psi) \quad (3)$$

ist aber:

$$\cos 40^\circ + \cos 80^\circ = 2\cos 60^\circ \cos(-20^\circ),$$

oder, weil  $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ ,  $\cos(-20^\circ) = \cos 20^\circ$  ist:

$$\cos 40^\circ + \cos 80^\circ = \cos 20^\circ,$$

also:

$$\text{IV.} \dots -\sin 20^\circ \sin 40^\circ + \sin 40^\circ \sin 80^\circ + \sin 80^\circ \sin 20^\circ = \frac{3}{4}.$$

Wie oben gefunden wurde, ist

$$\text{V.} \dots\dots\dots \cos 20^\circ - \cos 40^\circ = \cos 80^\circ,$$

welche Formel das Seitenstück zu I. bildet.

Setzt man in (3)  $\frac{1}{2}(\varphi + \psi) = 40^\circ$ ,  $\frac{1}{2}(\varphi - \psi) = 20^\circ$ , so ist  $\varphi = 60^\circ$ ,  $\psi = 20^\circ$ , also:

$$2 \cos 20^\circ \cos 40^\circ = \cos 20^\circ + \cos 60^\circ,$$

oder, weil  $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$  ist:

$$2 \cos 20^\circ \cos 40^\circ = \cos 20^\circ + \frac{1}{2}.$$

Multipliziert man beiderseits mit  $4 \cos 80^\circ$ , so ist:

$$8 \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ = 4 \cos 20^\circ \cos 80^\circ + 2 \cos 80^\circ.$$

Setzt man nun in (3)  $\frac{1}{2}(\varphi + \psi) = 80^\circ$ ,  $\frac{1}{2}(\varphi - \psi) = 20^\circ$ , so ist  $\varphi = 100^\circ$ ,  $\psi = 60^\circ$ , also:

$$2 \cos 20^\circ \cos 80^\circ = \cos 100^\circ + \cos 60^\circ = -\cos 80^\circ + \frac{1}{2},$$

und demnach:

$$\text{VI.} \quad \dots \quad 8 \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ = 1,$$

das Seitenstück zu II.

Multipliziert man noch mit  $2 \cos 60^\circ = 1$ , so ist:

$$\text{VII.} \quad \dots \quad 16 \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 60^\circ \cos 80^\circ = 1.$$

Aus (3) erhält man ferner analog dem Vorigen

$$2 \cos 20^\circ \cos 40^\circ = \cos 60^\circ + \cos 20^\circ,$$

$$-2 \cos 40^\circ \cos 80^\circ = -\cos 120^\circ - \cos 40^\circ,$$

$$2 \cos 80^\circ \cos 20^\circ = \cos 60^\circ + \cos 100^\circ;$$

addirt man diese 3 Gleichungen, so erhält man, weil  $\cos 120^\circ = -\cos 60^\circ$ ,  $\cos 100^\circ = -\cos 80^\circ$  ist:

$$2(\cos 20^\circ \cos 40^\circ - \cos 40^\circ \cos 80^\circ + \cos 80^\circ \cos 20^\circ)$$

$$= \frac{1}{2} + (\cos 20^\circ - \cos 40^\circ - \cos 80^\circ),$$

also nach V.:

$$\text{VIII.} \quad \cos 20^\circ \cos 40^\circ - \cos 40^\circ \cos 80^\circ + \cos 80^\circ \cos 20^\circ = \frac{1}{4}.$$

III. und VII. addirt ergeben:

IX.

$$\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 60^\circ \sin 80^\circ + \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 60^\circ \cos 80^\circ = \frac{1}{4}.$$

Subtrahirt man VII. von III. so ist:

X.

$$\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 60^\circ \sin 80^\circ - \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 60^\circ \cos 80^\circ = \frac{1}{4}.$$

Durch Multiplication von I. und V. erhält man wieder I.; durch die von II. und VI. wieder II.; durch die von III. und VII. wieder III. Addirt man IV. und VIII., so ergibt sich die identische Gleichung:

$$3\cos 60^{\circ} = \frac{3}{2}.$$

Das Product von III. und VII. lässt sich auch schreiben, wenn man mit  $\sin 90^{\circ} = 1$  multiplicirt:

**XI.**

$$\begin{aligned} & \sin 10^{\circ} \sin 20^{\circ} \sin 30^{\circ} \sin 40^{\circ} \sin 50^{\circ} \sin 60^{\circ} \sin 70^{\circ} \sin 80^{\circ} \sin 90^{\circ} \\ &= \cos 0^{\circ} \cos 10^{\circ} \cos 20^{\circ} \cos 30^{\circ} \cos 40^{\circ} \cos 50^{\circ} \cos 60^{\circ} \cos 70^{\circ} \cos 80^{\circ} = \frac{1}{2^{16}}. \end{aligned}$$

---

## **XII.**

### **Zur Construction von Dreiecken mit Benutzung der Eigenthümlichkeiten des Entfernungsortsdreiecks.**

Von

Herrn Professor Dr. *H. Emsmann*  
an der Realschule 1. Ordnung in Stettin.

---

In der Abhandlung: Auf das Entfernungsortsdreieck Bezügliches (Nr. X. S. 121.) haben sich manche Eigenthümlichkeiten ergeben, die eine Verwerthung wünschenswerth machen. Es scheint dies noch nicht hinreichend beachtet zu sein, und darum erlaube mir dazu einige Andeutungen zu geben.

Schon die von Jacobi nachgewiesene und auch von mir (Archiv. Theil XLV. S. 353.) angegebene Eigenthümlichkeit, dass die Entfernungsorter parallel sind der Linie, auf welcher die

Durchschnittspunkte der die Aussenwinkel eines Dreiecks Halbirenden mit den gegenüberliegenden Dreiecksseiten liegen, lässt sich zur Construction von Dreiecken verwerthen, wenn nämlich eine Entfernungsortsstrecke und ausserdem Grössen gegeben sind, durch welche die Gestalt des Dreiecks bestimmt wird. Die Lösung derartiger Aufgaben ist leicht und es genüge daher hier diese Andeutung. Es gehören hierher auch die Aufgaben  $a-c$ ,  $b-c$ ,  $C$ ;  $a-c$ ,  $a-b$ ,  $A$  und  $a-b$ ,  $b-c$ ,  $B$ .

In den folgenden Zeilen beabsichtige ich auf einen anderen Fall hinzuweisen, um auf das Entfernungsortsdreieck die Aufmerksamkeit mehr hinzulenken, als dasselbe bisher gefunden zu haben scheint.

In der oben angezogenen Abhandlung ist in 15. Zus. 3. im Falle  $q = 1$  ist, d. h. die Seiten selbst und nicht aliquote Theile derselben abgeschnitten werden, für die Entfernungsortsstrecken gefunden worden:

$$K_a = a \sqrt{1 - \frac{2r}{R}}; \quad K_b = b \sqrt{1 - \frac{2r}{R}}; \quad K_c = c \sqrt{1 - \frac{2r}{R}};$$

wo  $K_a$ ,  $K_b$  und  $K_c$  die zu den respectiven Seiten  $a$ ,  $b$  und  $c$  gehörigen Entfernungsortsstrecken,  $r$  den Radius des eingeschriebenen und  $R$  den des umschriebenen Kreises bedeuten.

Bekanntlich ist der Abstand der Mittelpunkte des ein- und umschriebenen Kreises bei einem Dreiecke  $= e = \sqrt{R(R-2r)}$ .

Ist nun  $r:R = m:n$ , so wird  $e = \frac{1}{n} R \sqrt{n(n-2m)} = \frac{1}{m} r \sqrt{n(n-2m)}$ .

In demselben Falle wird aber auch  $K_a = \frac{1}{n} a \sqrt{n(n-2m)}$ ,  $K_b = \frac{1}{n} b \sqrt{n(n-2m)}$  und  $K_c = \frac{1}{n} c \sqrt{n(n-2m)}$ . Hieraus ersieht man,

dass man bei der Construction von Dreiecken, bei welchen unter den Bestimmungsstücken das Verhältniss der Radien des eingeschriebenen und umschriebenen Kreises sich befindet, die Lösung sowohl mit Benutzung der ersteren, als der zweiten Beziehung finden können. Dass man den letzteren Weg bereits versucht habe, ist mir nicht bekannt, und daher will ich hier an zwei Beispielen den Nachweis der Zweckmässigkeit des letzteren Weges unternehmen.

1. Zur Construction eines gleichschenkeligen Dreiecks sei das Verhältniss der Radien des eingeschriebenen und umschriebenen Kreises  $r:R = m:n$  und ausserdem die Grundseite  $a = p$  gegeben.



**XIII.****Neue analytische Entwicklung der allgemeinsten  
Gesetze der Statik.**

Von  
dem Herausgeber.

---

**E i n l e i t u n g.**

Die Lehren der Statik werden, insofern man nicht von dem Princip der virtuellen Geschwindigkeiten ausgeht, meistens so entwickelt, dass man sich von der Betrachtung der besonderen Fälle der auf einen Punkt wirkenden Kräfte, der parallelen Kräfte und der in einer und derselben Ebene wirkenden Kräfte nach und nach zu dem allgemeinsten Falle beliebig im Raume wirkender Kräfte und den sechs allgemeinen Bedingungsgleichungen des Gleichgewichts solcher Kräfte, die gewissermaassen die ganze Statik in einem einzigen einfachen analytischen Ausdrucke enthalten, erhebt. So viele Vortheile ein solcher Gang in mehreren Beziehungen namentlich für den ersten Unterricht darbietet: so hat es mir doch auf der anderen Seite immer wissenschaftlicher erschienen, den umgekehrten Weg zu verfolgen, also zuerst ganz im Allgemeinen die in Rede stehenden sechs Bedingungsgleichungen für das Gleichgewicht beliebiger Kräfte im Raume zu entwickeln, und aus denselben dann alles Uebrige als besondere Fälle abzuleiten. Auf einem solchen Wege habe ich in der vorliegenden Abhandlung die ganze Statik in ihren allgemeinsten Resultaten zu entwickeln versucht, wobei nichts weiter als der Satz von dem Parallelogramme der Kräfte vorausgesetzt und zu Grunde gelegt worden ist. Ausserdem unterscheiden







$$x = a + r \cos \alpha,$$

$$y = b + r \cos \beta,$$

$$z = c + r \cos \gamma.$$

gegen den Punkt  $(xyz)$  in der negativen Richtung, so ist  $r$ , sein absoluter Werth ist  $-r$ , und da nun der negativen Richtung, in welcher  $(xyz)$  liegt, die Winkel  $180^\circ - \alpha$ ,  $180^\circ - \beta$ , entsprechen; so ist nach den bekanntesten Formeln der von der Verwandlung der Coordinaten:

$$x = a + (-r) \cos(180^\circ - \alpha),$$

$$y = b + (-r) \cos(180^\circ - \beta),$$

$$z = c + (-r) \cos(180^\circ - \gamma)$$

$$x = a + r \cos \alpha,$$

$$y = b + r \cos \beta,$$

$$z = c + r \cos \gamma.$$

ist in beiden Fällen, und folglich in völliger Allgemeinheit:

$$\dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} x = a + r \cos \alpha, \\ y = b + r \cos \beta, \\ z = c + r \cos \gamma; \end{array} \right.$$

$$\dots \dots \dots \frac{x-a}{\cos \alpha} = \frac{y-b}{\cos \beta} = \frac{z-c}{\cos \gamma} = r,$$

auch:

$$\cos \alpha = \frac{x-a}{r}, \quad \cos \beta = \frac{y-b}{r}, \quad \cos \gamma = \frac{z-c}{r}.$$

ergibt, indem wir alle Richtungen von  $(abc)$  an rechnen, der Punkt  $(xyz)$  in der positiven Richtung und ist also  $r$  positiv, so wirkt die Kraft, je nachdem sie positiv oder negativ ist, von  $(abc)$  nach  $(xyz)$  oder nach der entgegengesetzten Richtung hin; liegt der Punkt  $(xyz)$  in der negativen Richtung und ist also  $r$  negativ, so wirkt die Kraft, je nachdem sie negativ oder positiv ist, von  $(xyz)$  nach  $(abc)$  oder nach der entgegengesetzten Richtung.

Wenn wir von einem beliebigen Punkte der Richtungslinie aus auf der Richtung dieser Kraft eine Gerade oder

2) Die Dreiecke sind gleichschenkelig, da  $BD = DC$  ist und  $A$  und  $A'$  auf der in  $D$  auf  $BC$  errichteten Normalen liegen.

3) Zieht man  $GF$  und  $G'F'$  parallel  $BC$ , so sind  $GF$  und  $G'F'$  Hälften der Entfernungsortsstrecken für  $a$ , weil  $BG = BG' = BC$  ist. Nun ist  $FG = DE = DL$ , ebenso  $F'G' = DE' = DL$ ;

aber  $DL:BD = NS:BN$ ; folglich  $\frac{1}{2}K_a:\frac{1}{2}a = \sqrt{n(n-2m)}:n$ , d. h.

$$K_a = \frac{1}{n}a \sqrt{n(n-2m)} = a \sqrt{1 - \frac{2m}{n}}. \text{ Da jedoch auch } K_a = a \sqrt{1 - \frac{2r}{R}}$$

ist, so ist  $\frac{2r}{R} = \frac{2m}{n}$ , d. h.  $r:R = m:n$ .

II. Zur Construction eines gleichschenkeligen Dreiecks sei das Verhältniss der Radien des eingeschriebenen und umschriebenen Kreises  $r:R = m:n$  und ausserdem die Länge der gleichen Seite  $b = q$  gegeben.

### A n a l y s i s.

Da  $K_b = \pm \frac{1}{n}b \sqrt{n(n-2m)}$  ist, so ist  $K_b:b = \sqrt{n(n-2m)}:n$ , also  $K_b$  bestimmt. Es liegt aber bei dem gleichschenkeligen Dreiecke die Entfernungsortsstrecke  $K_b$  auf der Basis und es ist  $a = b \pm K_b$ , also erhält man zwei Werthe für  $a$ . Durch Basis und Schenkel ist das gleichschenkelige Dreieck bestimmt, also erhält man durch die gegebenen Bestimmungsstücke zwei den Anforderungen entsprechende Dreiecke.

### C o n s t r u c t i o n.

Construire zunächst wie im ersten Beispiele, nämlich (Taf. V. Fig. 6.)  $BN = NO = n$ ;  $OP = PM = m$ ; Halbkreis über  $BM$ ;  $NS$  normal auf  $BM$ ; ziehe  $BS$ ; darauf schlage mit  $q$  um  $B$  einen Kreis, welcher  $BM$  in  $G$  schneidet; errichte  $GL$  normal in  $G$  auf  $BM$  bis zum Durchschnitt mit  $BS$ ; schlage mit  $GL$  um  $G$  einen Kreis, welcher  $BM$  in  $C$  und  $C'$  trifft; halbire  $BC$  in  $D$  und  $BC'$  in  $D'$ , also  $BD = DC$  und  $BD' = D'C'$ ; errichte in  $D$  und  $D'$  Normalen auf  $BC$  (Parallelen mit  $GL$ ), welche den Kreis mit  $q$  um  $B$  in  $A$  und  $A'$  schneiden; ziehe  $AC$  und  $A'C'$ : so sind  $ABC$  und  $A'BC'$  die verlangten Dreiecke.

B e w e i s.

1) Die Dreiecke sind gleichschenkelig, weil  $BD = DC$  und  $BD' = D'C'$  ist und  $A$  und  $A'$  auf den in  $D$  und  $D'$  errichteten Normalen liegen.

2) Die gleiche Seite hat die Länge  $q$ , weil  $BA$  und  $BA' = BG = q$  sind.

3)  $GC = BC - BG = BC - BA = a - b = +K_b$ ; ebenso  $GC' = BG - BC' = BA - BC' = b - a = -K_b$ . Nun ist  $GL:GB = NS:BN$ , d. h.  $GC$  oder  $GC':b = \sqrt{n(n-2m)}:n$ ; also  $\pm K_b = \pm \frac{1}{n} b \sqrt{n(n-2m)} = \pm b \sqrt{1 - \frac{2m}{n}}$ . Da jedoch auch  $\pm K_b = \pm \sqrt{1 - \frac{2r}{R}}$  ist, so ist  $r:R = m:n$ .

Für  $r:R = 3:8$  ergibt sich sofort mit Benutzung der Entfernungsortsstrecke, dass der Schenkel des gleichschenkeligen Dreiecks doppelt so gross ist als die Basis, oder die Basis um den halben Schenkel länger, d. h. der Schenkel gleich  $\frac{2}{3}$  der Basis. Im ersteren Falle ist die Höhe des Dreiecks  $h = \frac{15}{8} R$ , im zweiten  $h = \frac{7}{8} R$ .

Dies Beispiel genüge für die Fälle, wo das Verhältniss  $r:R$  in bestimmten Zahlen gegeben ist, z. B.  $r:R = 4:9; = 15:32; 12:25$  u. s. w.

Aus den Systemen 4) und 5) erhält man, wenn man dieselbe beziehungsweise mit  $\cos \alpha_0$  und  $\cos \alpha_1$  multiplicirt, und dann beiden ersten, die beiden zweiten, die beiden dritten Gleichungen zu einander addirt, sehr leicht die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}
 & (P_0 \cos \alpha_0 + P_1 \cos \alpha_1) (\cos \alpha_0 \cos \beta_1 - \cos \beta_0 \cos \alpha_1) \\
 = & P \cos \alpha (\cos \alpha_0 \cos \beta_1 - \cos \beta_0 \cos \alpha_1) - \cos \beta (\cos \alpha_0 \cos \alpha_1 - \cos \alpha_0 \cos \alpha_1) \\
 & (P_0 \cos \alpha_0 + P_1 \cos \alpha_1) (\cos \beta_0 \cos \gamma_1 - \cos \gamma_0 \cos \beta_1) \\
 = & -P \cos \beta (\cos \gamma_0 \cos \alpha_1 - \cos \alpha_0 \cos \gamma_1) + \cos \gamma (\cos \alpha_0 \cos \beta_1 - \cos \beta_0 \cos \alpha_1) \\
 & (P_0 \cos \alpha_0 + P_1 \cos \alpha_1) (\cos \gamma_0 \cos \alpha_1 - \cos \alpha_0 \cos \gamma_1) \\
 = & P \cos \gamma (\cos \alpha_0 \cos \alpha_1 - \cos \alpha_0 \cos \alpha_1) + \cos \alpha (\cos \gamma_0 \cos \alpha_1 - \cos \alpha_0 \cos \gamma_1)
 \end{aligned}$$

folglich, weil nach 3):

$$\begin{aligned}
 & \cos \beta (\cos \gamma_0 \cos \alpha_1 - \cos \alpha_0 \cos \gamma_1) + \cos \gamma (\cos \alpha_0 \cos \beta_1 - \cos \beta_0 \cos \alpha_1) \\
 & = -\cos \alpha (\cos \beta_0 \cos \gamma_1 - \cos \gamma_0 \cos \beta_1)
 \end{aligned}$$

ist:

$$\begin{aligned}
 & (P_0 \cos \alpha_0 + P_1 \cos \alpha_1) (\cos \alpha_0 \cos \beta_1 - \cos \beta_0 \cos \alpha_1) \\
 = & P \cos \alpha (\cos \alpha_0 \cos \beta_1 - \cos \beta_0 \cos \alpha_1), \\
 & (P_0 \cos \alpha_0 + P_1 \cos \alpha_1) (\cos \beta_0 \cos \gamma_1 - \cos \gamma_0 \cos \beta_1) \\
 = & P \cos \alpha (\cos \beta_0 \cos \gamma_1 - \cos \gamma_0 \cos \beta_1), \\
 & (P_0 \cos \alpha_0 + P_1 \cos \alpha_1) (\cos \gamma_0 \cos \alpha_1 - \cos \alpha_0 \cos \gamma_1) \\
 = & P \cos \alpha (\cos \gamma_0 \cos \alpha_1 - \cos \alpha_0 \cos \gamma_1).
 \end{aligned}$$

Wäre nun zu gleicher Zeit:

$$\begin{aligned}
 & \cos \alpha_0 \cos \beta_1 - \cos \beta_0 \cos \alpha_1 = 0, \\
 & \cos \beta_0 \cos \gamma_1 - \cos \gamma_0 \cos \beta_1 = 0, \\
 & \cos \gamma_0 \cos \alpha_1 - \cos \alpha_0 \cos \gamma_1 = 0;
 \end{aligned}$$

so wäre:

$$\begin{aligned}
 & (\cos \alpha_0 \cos \beta_1 - \cos \beta_0 \cos \alpha_1)^2 \\
 & + (\cos \beta_0 \cos \gamma_1 - \cos \gamma_0 \cos \beta_1)^2 \\
 & + (\cos \gamma_0 \cos \alpha_1 - \cos \alpha_0 \cos \gamma_1)^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (\cos \alpha_0^2 + \cos \beta_0^2 + \cos \gamma_0^2)(\cos \alpha_1^2 + \cos \beta_1^2 + \cos \gamma_1^2) \\
&\quad - (\cos \alpha_0 \cos \alpha_1 + \cos \beta_0 \cos \beta_1 + \cos \gamma_0 \cos \gamma_1)^2 \\
&= 1 - (\cos \alpha_0 \cos \alpha_1 + \cos \beta_0 \cos \beta_1 + \cos \gamma_0 \cos \gamma_1)^2 = 0,
\end{aligned}$$

und nach bekannten Formeln würden also die Sinus der von den durch die Gleichungen 2) charakterisirten Geraden eingeschlossenen Winkel verschwinden, daher diese beiden Geraden zusammenfallen; es wäre folglich in der That für die Zerlegung der Kraft  $P$  nur eine Gerade als Richtungslinie gegeben, da ja doch nothwendig zwei Richtungslinien gegeben sein müssen, wenn überhaupt von der Zerlegung der Kraft  $P$  in zwei Kräfte soll die Rede sein können. Daher können die Grössen

$$\cos \alpha_0 \cos \beta_1 - \cos \beta_0 \cos \alpha_1,$$

$$\cos \beta_0 \cos \gamma_1 - \cos \gamma_0 \cos \beta_1,$$

$$\cos \gamma_0 \cos \alpha_1 - \cos \alpha_0 \cos \gamma_1$$

nicht zu gleicher Zeit verschwinden, und es wird also immer mindestens eine dieser Grössen nicht verschwinden. Deshalb ergibt sich aus den drei oben gefundenen Gleichungen durch Division immer die Gleichung:

$$P_0 \cos \alpha_0 + P_1 \cos \alpha_1 = P \cos \alpha.$$

Ueberhaupt aber erhält man auf ganz ähnliche Weise wie vorher die drei folgenden Gleichungen:

$$6) \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} P \cos \alpha = P_0 \cos \alpha_0 + P_1 \cos \alpha_1, \\ P \cos \beta = P_0 \cos \beta_0 + P_1 \cos \beta_1, \\ P \cos \gamma = P_0 \cos \gamma_0 + P_1 \cos \gamma_1. \end{array} \right.$$

Wenn man diese drei Gleichungen quadriert und dann zu einander addirt, so erhält man die Gleichung:

7)

$$P^2 = (P_0 \cos \alpha_0 + P_1 \cos \alpha_1)^2 + (P_0 \cos \beta_0 + P_1 \cos \beta_1)^2 + (P_0 \cos \gamma_0 + P_1 \cos \gamma_1)^2$$

oder:

8)

$$P^2 = P_0^2 + P_1^2 + 2P_0P_1(\cos \alpha_0 \cos \alpha_1 + \cos \beta_0 \cos \beta_1 + \cos \gamma_0 \cos \gamma_1),$$

wo bekanntlich

$$\cos \alpha_0 \cos \alpha_1 + \cos \beta_0 \cos \beta_1 + \cos \gamma_0 \cos \gamma_1$$

der Cosinus des von den positiven Richtungen der beiden durch

die Gleichungen 2) charakterisirten Richtungslinien eingeschlossen,  $180^\circ$  nicht übersteigenden Winkels ist.

Die Kräfte  $P_0$ ,  $P_1$  erhält man mittelst der folgenden, aus 4) und 5) sich unmittelbar ergebenden Formeln:

$$\begin{aligned} 9) \dots P_0 &= \frac{\cos \alpha \cos \beta_1 - \cos \beta \cos \alpha_1}{\cos \alpha_0 \cos \beta_1 - \cos \beta_0 \cos \alpha_1} P \\ &= \frac{\cos \beta \cos \gamma_1 - \cos \gamma \cos \beta_1}{\cos \beta_0 \cos \gamma_1 - \cos \gamma_0 \cos \beta_1} P \\ &= \frac{\cos \gamma \cos \alpha_1 - \cos \alpha \cos \gamma_1}{\cos \gamma_0 \cos \alpha_1 - \cos \alpha_0 \cos \gamma_1} P \end{aligned}$$

und:

$$\begin{aligned} 10) \dots P_1 &= -\frac{\cos \alpha \cos \beta_0 - \cos \beta \cos \alpha_0}{\cos \alpha_0 \cos \beta_1 - \cos \beta_0 \cos \alpha_1} P \\ &= -\frac{\cos \beta \cos \gamma_0 - \cos \gamma \cos \beta_0}{\cos \beta_0 \cos \gamma_1 - \cos \gamma_0 \cos \beta_1} P \\ &= -\frac{\cos \gamma \cos \alpha_0 - \cos \alpha \cos \gamma_0}{\cos \gamma_0 \cos \alpha_1 - \cos \alpha_0 \cos \gamma_1} P. \end{aligned}$$

Wenn man, wie es verstattet ist:

11)

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \cos \theta \cos \omega, & \cos \alpha_0 &= \cos \theta_0 \cos \omega_0, & \cos \alpha_1 &= \cos \theta_1 \cos \omega_1 \\ \cos \beta &= \sin \theta \cos \omega, & \cos \beta_0 &= \sin \theta_0 \cos \omega_0, & \cos \beta_1 &= \sin \theta_1 \cos \omega_1 \\ \cos \gamma &= \sin \omega; & \cos \gamma_0 &= \sin \omega_0; & \cos \gamma_1 &= \sin \omega_1 \end{aligned}$$

setzt, so ist:

$$\begin{aligned} \cos \alpha \cos \beta_0 - \cos \beta \cos \alpha_0 &= -\cos \omega \cos \omega_0 \sin(\theta - \theta_0), \\ \cos \alpha \cos \beta_1 - \cos \beta \cos \alpha_1 &= -\cos \omega \cos \omega_1 \sin(\theta - \theta_1), \\ \cos \alpha_0 \cos \beta_1 - \cos \beta_0 \cos \alpha_1 &= -\cos \omega_0 \cos \omega_1 \sin(\theta_0 - \theta_1); \end{aligned}$$

also nach 9) und 10):

$$12) \dots \left\{ \begin{aligned} P_0 &= \frac{\cos \omega \sin(\theta - \theta_1)}{\cos \omega_0 \sin(\theta_0 - \theta_1)} P, \\ P_1 &= -\frac{\cos \omega \sin(\theta - \theta_0)}{\cos \omega_1 \sin(\theta_0 - \theta_1)} P. \end{aligned} \right.$$



Nehmen wir in den durch die Gleichungen 2) charakterisirten Richtungslinien der beiden gesuchten Kräfte  $P_0, P_1$  beziehungsweise die beliebigen Punkte  $(a_0 b_0 c_0), (a_1 b_1 c_1)$  an, und bezeichnen deren gehörig als positiv oder negativ betrachtete Entfernungen von dem Punkte  $(abc)$  beziehungsweise durch  $r_0, r_1$ ; so ist nach §. 1. 5.):

$$\cos \alpha_0 = \frac{a_0 - a}{r_0}, \quad \cos \beta_0 = \frac{b_0 - b}{r_0}, \quad \cos \gamma_0 = \frac{c_0 - c}{r_0};$$

$$\cos \alpha_1 = \frac{a_1 - a}{r_1}, \quad \cos \beta_1 = \frac{b_1 - b}{r_1}, \quad \cos \gamma_1 = \frac{c_1 - c}{r_1};$$

also nach 6):

$$13) \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} P \cos \alpha = P_0 \frac{a_0 - a}{r_0} + P_1 \frac{a_1 - a}{r_1}, \\ P \cos \beta = P_0 \frac{b_0 - b}{r_0} + P_1 \frac{b_1 - b}{r_1}, \\ P \cos \gamma = P_0 \frac{c_0 - c}{r_0} + P_1 \frac{c_1 - c}{r_1}. \end{array} \right.$$

Ueber die Richtungen der positiven oder negativen Kräfte  $P_0$  und  $P_1$  mit Rücksicht auf die Lage der Punkte  $(abc), (a_0 b_0 c_0)$  und  $(a_1 b_1 c_1)$  ist schon in §. 1. das Nöthige im Allgemeinen bemerkt worden.

### §. 3.

#### Zerlegung einer Kraft in drei Kräfte.

Die Gleichungen der Richtungslinie der Kraft  $P$  seien:

$$1) \dots \dots \dots \frac{x - a}{\cos \alpha} = \frac{y - b}{\cos \beta} = \frac{z - c}{\cos \gamma},$$

wo wir uns, da der Punkt  $(abc)$  in der Richtungslinie liegt, die Kraft  $P$  in diesem Punkte wirkend denken können. Die Gleichungen dreier anderen durch den Punkt  $(abc)$  gehenden Geraden seien:

$$2) \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} \frac{x - a}{\cos \alpha_0} = \frac{y - b}{\cos \beta_0} = \frac{z - c}{\cos \gamma_0}, \\ \frac{x - a}{\cos \alpha_1} = \frac{y - b}{\cos \beta_1} = \frac{z - c}{\cos \gamma_1}, \\ \frac{x - a}{\cos \alpha_2} = \frac{y - b}{\cos \beta_2} = \frac{z - c}{\cos \gamma_2}; \end{array} \right.$$



$$\begin{aligned}
 & \left\{ \begin{aligned} & \cos \alpha_0 (\cos \beta_1 \cos \gamma_2 - \cos \gamma_1 \cos \beta_2) \\ & + \cos \beta_0 (\cos \gamma_1 \cos \alpha_2 - \cos \alpha_1 \cos \gamma_2) \\ & + \cos \gamma_0 (\cos \alpha_1 \cos \beta_2 - \cos \beta_1 \cos \alpha_2) \end{aligned} \right\} P_0 \\
 = & \left\{ \begin{aligned} & \cos \alpha (\cos \beta_1 \cos \gamma_2 - \cos \gamma_1 \cos \beta_2) \\ & + \cos \beta (\cos \gamma_1 \cos \alpha_2 - \cos \alpha_1 \cos \gamma_2) \\ & + \cos \gamma (\cos \alpha_1 \cos \beta_2 - \cos \beta_1 \cos \alpha_2) \end{aligned} \right\} P
 \end{aligned}$$

gibt.

Setzen wir nun der Kürze wegen:

$$\begin{aligned}
 1) \dots N &= \cos \alpha_0 (\cos \beta_1 \cos \gamma_2 - \cos \gamma_1 \cos \beta_2) \\
 &+ \cos \beta_0 (\cos \gamma_1 \cos \alpha_2 - \cos \alpha_1 \cos \gamma_2) \\
 &+ \cos \gamma_0 (\cos \alpha_1 \cos \beta_2 - \cos \beta_1 \cos \alpha_2) \\
 &= \cos \alpha_1 (\cos \beta_2 \cos \gamma_0 - \cos \gamma_2 \cos \beta_0) \\
 &+ \cos \beta_1 (\cos \gamma_2 \cos \alpha_0 - \cos \alpha_2 \cos \gamma_0) \\
 &+ \cos \gamma_1 (\cos \alpha_2 \cos \beta_0 - \cos \beta_2 \cos \alpha_0) \\
 &= \cos \alpha_2 (\cos \beta_0 \cos \gamma_1 - \cos \gamma_0 \cos \beta_1) \\
 &+ \cos \beta_2 (\cos \gamma_0 \cos \alpha_1 - \cos \alpha_0 \cos \gamma_1) \\
 &+ \cos \gamma_2 (\cos \alpha_0 \cos \beta_1 - \cos \beta_0 \cos \alpha_1)
 \end{aligned}$$

d:

$$\begin{aligned}
 5) \dots N_{01} &= \cos \alpha (\cos \beta_0 \cos \gamma_1 - \cos \gamma_0 \cos \beta_1) \\
 &+ \cos \beta (\cos \gamma_0 \cos \alpha_1 - \cos \alpha_0 \cos \gamma_1) \\
 &+ \cos \gamma (\cos \alpha_0 \cos \beta_1 - \cos \beta_0 \cos \alpha_1), \\
 N_{12} &= \cos \alpha (\cos \beta_1 \cos \gamma_2 - \cos \gamma_1 \cos \beta_2) \\
 &+ \cos \beta (\cos \gamma_1 \cos \alpha_2 - \cos \alpha_1 \cos \gamma_2) \\
 &+ \cos \gamma (\cos \alpha_1 \cos \beta_2 - \cos \beta_1 \cos \alpha_2), \\
 N_{20} &= \cos \alpha (\cos \beta_2 \cos \gamma_0 - \cos \gamma_2 \cos \beta_0) \\
 &+ \cos \beta (\cos \gamma_2 \cos \alpha_0 - \cos \alpha_2 \cos \gamma_0) \\
 &+ \cos \gamma (\cos \alpha_2 \cos \beta_0 - \cos \beta_2 \cos \alpha_0);
 \end{aligned}$$

so haben wir nach dem Vorhergehenden zur Bestimmung der Kräfte  $P_0$ ,  $P_1$ ,  $P_2$  überhaupt die drei folgenden Gleichungen:

$$6) \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} NP_0 = N_{12}P, \\ NP_1 = N_{20}P, \\ NP_2 = N_{01}P; \end{array} \right.$$

wobei man zu bemerken hat, dass die Grösse  $N$  nicht verschwindet, weil, wenn dies der Fall wäre, die drei gegebenen Richtungslinien in einer Ebene liegen würden, was gegen die Voraussetzung streitet:

Nach 6) ist:

$$N(P_0 \cos \alpha_0 + P_1 \cos \alpha_1 + P_2 \cos \alpha_2) = (N_{12} \cos \alpha_0 + N_{20} \cos \alpha_1 + N_{01} \cos \alpha_2)P,$$

$$N(P_0 \cos \beta_0 + P_1 \cos \beta_1 + P_2 \cos \beta_2) = (N_{12} \cos \beta_0 + N_{20} \cos \beta_1 + N_{01} \cos \beta_2)P,$$

$$N(P_0 \cos \gamma_0 + P_1 \cos \gamma_1 + P_2 \cos \gamma_2) = (N_{12} \cos \gamma_0 + N_{20} \cos \gamma_1 + N_{01} \cos \gamma_2)P;$$

aber, wie man leicht aus 4) und 5) schliesst:

$$N_{12} \cos \alpha_0 + N_{20} \cos \alpha_1 + N_{01} \cos \alpha_2 = N \cos \alpha,$$

$$N_{12} \cos \beta_0 + N_{20} \cos \beta_1 + N_{01} \cos \beta_2 = N \cos \beta,$$

$$N_{12} \cos \gamma_0 + N_{20} \cos \gamma_1 + N_{01} \cos \gamma_2 = N \cos \gamma;$$

also:

$$N(P_0 \cos \alpha_0 + P_1 \cos \alpha_1 + P_2 \cos \alpha_2) = NP \cos \alpha,$$

$$N(P_0 \cos \beta_0 + P_1 \cos \beta_1 + P_2 \cos \beta_2) = NP \cos \beta,$$

$$N(P_0 \cos \gamma_0 + P_1 \cos \gamma_1 + P_2 \cos \gamma_2) = NP \cos \gamma;$$

und folglich, weil  $N$  nicht verschwindet:

$$7) \dots \left\{ \begin{array}{l} P \cos \alpha = P_0 \cos \alpha_0 + P_1 \cos \alpha_1 + P_2 \cos \alpha_2, \\ P \cos \beta = P_0 \cos \beta_0 + P_1 \cos \beta_1 + P_2 \cos \beta_2, \\ P \cos \gamma = P_0 \cos \gamma_0 + P_1 \cos \gamma_1 + P_2 \cos \gamma_2; \end{array} \right.$$

woraus sich:

$$8) \dots P^2 = (P_0 \cos \alpha_0 + P_1 \cos \alpha_1 + P_2 \cos \alpha_2)^2 \\ + (P_0 \cos \beta_0 + P_1 \cos \beta_1 + P_2 \cos \beta_2)^2 \\ + (P_0 \cos \gamma_0 + P_1 \cos \gamma_1 + P_2 \cos \gamma_2)^2$$

oder, wie man leicht findet, wenn man die Quadrate entwickelt:

9)

$$\begin{aligned} P^2 = & P_0^2 + P_1^2 + P_2^2 \\ & + 2P_0P_1(\cos\alpha_0\cos\alpha_1 + \cos\beta_0\cos\beta_1 + \cos\gamma_0\cos\gamma_1) \\ & + 2P_1P_2(\cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2 + \cos\gamma_1\cos\gamma_2) \\ & + 2P_2P_0(\cos\alpha_2\cos\alpha_0 + \cos\beta_2\cos\beta_0 + \cos\gamma_2\cos\gamma_0) \end{aligned}$$

ergibt. Die Grössen:

$$\cos\alpha_0\cos\alpha_1 + \cos\beta_0\cos\beta_1 + \cos\gamma_0\cos\gamma_1,$$

$$\cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2 + \cos\gamma_1\cos\gamma_2,$$

$$\cos\alpha_2\cos\alpha_0 + \cos\beta_2\cos\beta_0 + \cos\gamma_2\cos\gamma_0$$

sind die Cosinus der von den positiven Theilen der drei gegebenen Richtungslinien eingeschlossenen,  $180^\circ$  nicht übersteigenden Winkel.

Nehmen wir in den durch die Gleichungen 2) charakterisirten Richtungslinien der drei gesuchten Kräfte  $P_0$ ,  $P_1$ ,  $P_2$  beziehungsweise die beliebigen Punkte  $(a_0b_0c_0)$ ,  $(a_1b_1c_1)$ ,  $(a_2b_2c_2)$  an, und bezeichnen deren gehörig als positiv oder negativ betrachtete Entfernungen von dem Punkte  $(abc)$  beziehungsweise durch  $r_0$ ,  $r_1$ ,  $r_2$ ; so ist nach §. 1. 5.):

$$\cos\alpha_0 = \frac{a_0 - a}{r_0}, \quad \cos\beta_0 = \frac{b_0 - b}{r_0}, \quad \cos\gamma_0 = \frac{c_0 - c}{r_0};$$

$$\cos\alpha_1 = \frac{a_1 - a}{r_1}, \quad \cos\beta_1 = \frac{b_1 - b}{r_1}, \quad \cos\gamma_1 = \frac{c_1 - c}{r_1};$$

$$\cos\alpha_2 = \frac{a_2 - a}{r_2}, \quad \cos\beta_2 = \frac{b_2 - b}{r_2}, \quad \cos\gamma_2 = \frac{c_2 - c}{r_2};$$

also nach 7):

$$10) \dots \left\{ \begin{aligned} P\cos\alpha &= P_0 \frac{a_0 - a}{r_0} + P_1 \frac{a_1 - a}{r_1} + P_2 \frac{a_2 - a}{r_2}, \\ P\cos\beta &= P_0 \frac{b_0 - b}{r_0} + P_1 \frac{b_1 - b}{r_1} + P_2 \frac{b_2 - b}{r_2}, \\ P\cos\gamma &= P_0 \frac{c_0 - c}{r_0} + P_1 \frac{c_1 - c}{r_1} + P_2 \frac{c_2 - c}{r_2}. \end{aligned} \right.$$



die Gleichungen der Richtungslinien der beiden Kräfte  $P_0$ ,  $P_1$  seien. Weil nach der Voraussetzung diese beiden Kräfte im Gleichgewichte sind, so fallen nach dem Obigen die Richtungslinien in eine Gerade zusammen. Nehmen wir in den Richtungslinien zwei beliebige Punkte  $(\xi_0 \eta_0 \zeta_0)$  und  $(\xi_1 \eta_1 \zeta_1)$  an, so ist nach 1):

$$2) \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} \frac{\xi_0 - x_0}{\cos \alpha_0} = \frac{\eta_0 - y_0}{\cos \beta_0} = \frac{\zeta_0 - z_0}{\cos \gamma_0}, \\ \frac{\xi_1 - x_1}{\cos \alpha_1} = \frac{\eta_1 - y_1}{\cos \beta_1} = \frac{\zeta_1 - z_1}{\cos \gamma_1}. \end{array} \right.$$

Bezeichnen wir die gehörig als positiv oder negativ betrachtete Entfernung des Punktes  $(\xi_1 \eta_1 \zeta_1)$  von dem Punkte  $(\xi_0 \eta_0 \zeta_0)$ , indem wir diese Punkte in der Richtungslinie der Kraft  $P_0$  liegend annehmen, durch  $r_0$ ; die gehörig als positiv oder negativ betrachtete Entfernung des Punktes  $(\xi_0 \eta_0 \zeta_0)$  von dem Punkte  $(\xi_1 \eta_1 \zeta_1)$ , indem wir diese Punkte in der Richtungslinie der Kraft  $P_1$  liegend annehmen, durch  $r_1$ ; so ist nach §. 1. 4):

$$3) \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} \frac{\xi_1 - \xi_0}{\cos \alpha_0} = \frac{\eta_1 - \eta_0}{\cos \beta_0} = \frac{\zeta_1 - \zeta_0}{\cos \gamma_0} = r_0, \\ \frac{\xi_0 - \xi_1}{\cos \alpha_1} = \frac{\eta_0 - \eta_1}{\cos \beta_1} = \frac{\zeta_0 - \zeta_1}{\cos \gamma_1} = r_1; \end{array} \right.$$

folglich:

$$\xi_1 - \xi_0 = r_0 \cos \alpha_0,$$

$$\eta_1 - \eta_0 = r_0 \cos \beta_0,$$

$$\zeta_1 - \zeta_0 = r_0 \cos \gamma_0$$

und:

$$\xi_0 - \xi_1 = r_1 \cos \alpha_1,$$

$$\eta_0 - \eta_1 = r_1 \cos \beta_1,$$

$$\zeta_0 - \zeta_1 = r_1 \cos \gamma_1;$$

also, wenn man addirt:

$$r_0 \cos \alpha_0 + r_1 \cos \alpha_1 = 0,$$

$$r_0 \cos \beta_0 + r_1 \cos \beta_1 = 0,$$

$$r_0 \cos \gamma_0 + r_1 \cos \gamma_1 = 0;$$

oder:

$$\cos \alpha_0 + \frac{r_1}{r_0} \cos \alpha_1 = 0,$$

$$\cos \beta_0 + \frac{r_1}{r_0} \cos \beta_1 = 0,$$

$$\cos \gamma_0 + \frac{r_1}{r_0} \cos \gamma_1 = 0.$$

Weil nun aber nach dem Obigen die Kräfte  $P_0$ ,  $P_1$  absolut gleich sind und nach entgegengesetzten Richtungen hin wirken, so ist wie leicht erhellet, in völliger Allgemeinheit:

$$\frac{r_1}{r_0} = \frac{P_1}{P_0},$$

also nach dem Vorhergehenden:

$$\cos \alpha_0 + \frac{P_1}{P_0} \cos \alpha_1 = 0,$$

$$\cos \beta_0 + \frac{P_1}{P_0} \cos \beta_1 = 0,$$

$$\cos \gamma_0 + \frac{P_1}{P_0} \cos \gamma_1 = 0;$$

folglich:

$$4) \quad \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} P_0 \cos \alpha_0 + P_1 \cos \alpha_1 = 0, \\ P_0 \cos \beta_0 + P_1 \cos \beta_1 = 0, \\ P_0 \cos \gamma_0 + P_1 \cos \gamma_1 = 0. \end{array} \right.$$

Ferner ist nach 3):

$$\cos \alpha_0 = \frac{\xi_1 - \xi_0}{r_0}, \quad \cos \beta_0 = \frac{\eta_1 - \eta_0}{r_0}, \quad \cos \gamma_0 = \frac{\xi_1 - \xi_0}{r_0}$$

und:

$$\cos \alpha_1 = \frac{\xi_0 - \xi_1}{r_1}, \quad \cos \beta_1 = \frac{\eta_0 - \eta_1}{r_1}, \quad \cos \gamma_1 = \frac{\xi_0 - \xi_1}{r_1};$$

also:

$$P_0 (\xi_0 \cos \beta_0 - \eta_0 \cos \alpha_0) = \frac{P_0}{r_0} \{ \xi_0 (\eta_1 - \eta_0) - \eta_0 (\xi_1 - \xi_0) \},$$

$$P_0 (\eta_0 \cos \gamma_0 - \xi_0 \cos \beta_0) = \frac{P_0}{r_0} \{ \eta_0 (\xi_1 - \xi_0) - \xi_0 (\eta_1 - \eta_0) \},$$

$$P_0 (\xi_0 \cos \alpha_0 - \xi_0 \cos \gamma_0) = \frac{P_0}{r_0} \{ \xi_0 (\xi_1 - \xi_0) - \xi_0 (\xi_1 - \xi_0) \}$$



$$P_1 (\xi_1 \cos \beta_1 - \eta_1 \cos \alpha_1) = \frac{P_1}{r_1} \{ \xi_1 (\eta_0 - \eta_1) - \eta_1 (\xi_0 - \xi_1) \},$$

$$P_1 (\eta_1 \cos \gamma_1 - \xi_1 \cos \beta_1) = \frac{P_1}{r_1} \{ \eta_1 (\xi_0 - \xi_1) - \xi_1 (\eta_0 - \eta_1) \},$$

$$P_1 (\xi_1 \cos \alpha_1 - \xi_1 \cos \gamma_1) = \frac{P_1}{r_1} \{ \xi_1 (\xi_0 - \xi_1) - \xi_1 (\xi_0 - \xi_1) \};$$

gleich, wenn man addirt, weil

$$\frac{P_0}{r_0} = \frac{P_1}{r_1}$$

ist:

$$P_0 (\xi_0 \cos \beta_0 - \eta_0 \cos \alpha_0) + P_1 (\xi_1 \cos \beta_1 - \eta_1 \cos \alpha_1) = 0,$$

$$P_0 (\eta_0 \cos \gamma_0 - \xi_0 \cos \beta_0) + P_1 (\eta_1 \cos \gamma_1 - \xi_1 \cos \beta_1) = 0,$$

$$P_0 (\xi_0 \cos \alpha_0 - \xi_0 \cos \gamma_0) + P_1 (\xi_1 \cos \alpha_1 - \xi_1 \cos \gamma_1) = 0.$$

Nach 2) ist aber:

$$\xi_0 \cos \beta_0 - \eta_0 \cos \alpha_0 = x_0 \cos \beta_0 - y_0 \cos \alpha_0,$$

$$\eta_0 \cos \gamma_0 - \xi_0 \cos \beta_0 = y_0 \cos \gamma_0 - z_0 \cos \beta_0,$$

$$\xi_0 \cos \alpha_0 - \xi_0 \cos \gamma_0 = z_0 \cos \alpha_0 - x_0 \cos \gamma_0$$

und:

$$\xi_1 \cos \beta_1 - \eta_1 \cos \alpha_1 = x_1 \cos \beta_1 - y_1 \cos \alpha_1,$$

$$\eta_1 \cos \gamma_1 - \xi_1 \cos \beta_1 = y_1 \cos \gamma_1 - z_1 \cos \beta_1,$$

$$\xi_1 \cos \alpha_1 - \xi_1 \cos \gamma_1 = z_1 \cos \alpha_1 - x_1 \cos \gamma_1;$$

also nach dem Obigen:

$$P_0 (x_0 \cos \beta_0 - y_0 \cos \alpha_0) + P_1 (x_1 \cos \beta_1 - y_1 \cos \alpha_1) = 0,$$

$$P_0 (y_0 \cos \gamma_0 - z_0 \cos \beta_0) + P_1 (y_1 \cos \gamma_1 - z_1 \cos \beta_1) = 0,$$

$$P_0 (z_0 \cos \alpha_0 - x_0 \cos \gamma_0) + P_1 (z_1 \cos \alpha_1 - x_1 \cos \gamma_1) = 0.$$

Hieraus ergibt sich nun der folgende Satz:

Wenn die Kräfte  $P_0$ ,  $P_1$ , deren Richtungslinien durch die Gleichungen:

$$\frac{x-x_0}{\cos \alpha_0} = \frac{y-y_0}{\cos \beta_0} = \frac{z-z_0}{\cos \gamma_0},$$

$$\frac{x-x_1}{\cos \alpha_1} = \frac{y-y_1}{\cos \beta_1} = \frac{z-z_1}{\cos \gamma_1}$$

charakterisirt werden, im Gleichgewichte sind, so i

$$P_0 \cos \alpha_0 + P_1 \cos \alpha_1 = 0,$$

$$P_0 \cos \beta_0 + P_1 \cos \beta_1 = 0,$$

$$P_0 \cos \gamma_0 + P_1 \cos \gamma_1 = 0;$$

$$P_0(x_0 \cos \beta_0 - y_0 \cos \alpha_0) + P_1(x_1 \cos \beta_1 - y_1 \cos \alpha_1) = 0,$$

$$P_0(y_0 \cos \gamma_0 - z_0 \cos \beta_0) + P_1(y_1 \cos \gamma_1 - z_1 \cos \beta_1) = 0,$$

$$P_0(z_0 \cos \alpha_0 - x_0 \cos \gamma_0) + P_1(z_1 \cos \alpha_1 - x_1 \cos \gamma_1) = 0;$$

oder in abkürzender Schreibweise:

$$\Sigma P \cos \alpha = 0, \quad \Sigma P \cos \beta = 0, \quad \Sigma P \cos \gamma = 0;$$

$$\Sigma P(x \cos \beta - y \cos \alpha) = 0,$$

$$\Sigma P(y \cos \gamma - z \cos \beta) = 0,$$

$$\Sigma P(z \cos \alpha - x \cos \gamma) = 0.$$

Wir wollen jetzt untersuchen, ob sich dieser Satz auch umkehren lässt, nämlich: ob, wenn die vorstehenden sechs Gleichung erfüllt sind, sich behaupten lässt, dass die Kräfte  $P_0, P_1$  Gleichgewichte sind.

Aus den Gleichungen:

$$P_0 \cos \alpha_0 + P_1 \cos \alpha_1 = 0,$$

$$P_0 \cos \beta_0 + P_1 \cos \beta_1 = 0,$$

$$P_0 \cos \gamma_0 + P_1 \cos \gamma_1 = 0$$

folgt:

$$P_0 \cos \alpha_0 = -P_1 \cos \alpha_1,$$

$$P_0 \cos \beta_0 = -P_1 \cos \beta_1,$$

$$P_0 \cos \gamma_0 = -P_1 \cos \gamma_1;$$

also, wenn man diese Gleichungen quadriert und dann zu einander addirt:

$$P_0^2 = P_1^2,$$

ich:

$$P_1 = \pm P_0.$$

daher nach Vorstehendem:

$$\cos \alpha_1 = \mp \cos \alpha_0,$$

$$\cos \beta_1 = \mp \cos \beta_0,$$

$$\cos \gamma_1 = \mp \cos \gamma_0;$$

:

$$\alpha_1 = \begin{cases} 180^\circ - \alpha_0 \\ \alpha_0 \end{cases}$$

$$\beta_1 = \begin{cases} 180^\circ - \beta_0 \\ \beta_0 \end{cases}$$

$$\gamma_1 = \begin{cases} 180^\circ - \gamma_0 \\ \gamma_0 \end{cases}$$

mer mit Beziehung der oberen und unteren Zeichen auf einander. Hieraus ergibt sich mittelst einer sehr einfachen Betrachtung sogleich, dass die Kräfte  $P_0$ ,  $P_1$  absolut gleich und dass ihre Richtungslinien einander parallel sind, dass sie aber nach entgegengesetzten Seiten hin wirken.

Ferner ergibt sich aus den Gleichungen:

$$P_0(x_0 \cos \beta_0 - y_0 \cos \alpha_0) + P_1(x_1 \cos \beta_1 - y_1 \cos \alpha_1) = 0,$$

$$P_0(y_0 \cos \gamma_0 - z_0 \cos \beta_0) + P_1(y_1 \cos \gamma_1 - z_1 \cos \beta_1) = 0,$$

$$P_0(z_0 \cos \alpha_0 - x_0 \cos \gamma_0) + P_1(z_1 \cos \alpha_1 - x_1 \cos \gamma_1) = 0$$

mittelst des Vorhergehenden, wenn man nämlich für

$$P_1 \text{ und } \cos \alpha_1, \cos \beta_1, \cos \gamma_1$$

respective

$$\pm P_0 \text{ und } \mp \cos \alpha_0, \mp \cos \beta_0, \mp \cos \gamma_0$$

setzt:

$$x_0 \cos \beta_0 - y_0 \cos \alpha_0 - (x_1 \cos \beta_0 - y_1 \cos \alpha_0) = 0,$$

$$y_0 \cos \gamma_0 - z_0 \cos \beta_0 - (y_1 \cos \gamma_0 - z_1 \cos \beta_0) = 0,$$

$$z_0 \cos \alpha_0 - x_0 \cos \gamma_0 - (z_1 \cos \alpha_0 - x_1 \cos \gamma_0) = 0;$$

und wenn man für

$$P_0 \text{ und } \cos \alpha_0, \cos \beta_0, \cos \gamma_0$$

respective

$$\pm P_1 \text{ und } \mp \cos \alpha_1, \mp \cos \beta_1, \mp \cos \gamma_1;$$

setzt:

$$-(x_0 \cos \beta_1 - y_0 \cos \alpha_1) + (x_1 \cos \beta_1 - y_1 \cos \alpha_1) = 0,$$

$$-(y_0 \cos \gamma_1 - z_0 \cos \beta_1) + (y_1 \cos \gamma_1 - z_1 \cos \beta_1) = 0,$$

$$-(z_0 \cos \alpha_1 - x_0 \cos \gamma_1) + (z_1 \cos \alpha_1 - x_1 \cos \gamma_1) = 0.$$

Daher haben wir die Gleichungen:

$$x_0 \cos \beta_0 - y_0 \cos \alpha_0 = x_1 \cos \beta_0 - y_1 \cos \alpha_0,$$

$$y_0 \cos \gamma_0 - z_0 \cos \beta_0 = y_1 \cos \gamma_0 - z_1 \cos \beta_0,$$

$$z_0 \cos \alpha_0 - x_0 \cos \gamma_0 = z_1 \cos \alpha_0 - x_1 \cos \gamma_0$$

und:

$$x_0 \cos \beta_1 - y_0 \cos \alpha_1 = x_1 \cos \beta_1 - y_1 \cos \alpha_1,$$

$$y_0 \cos \gamma_1 - z_0 \cos \beta_1 = y_1 \cos \gamma_1 - z_1 \cos \beta_1,$$

$$z_0 \cos \alpha_1 - x_0 \cos \gamma_1 = z_1 \cos \alpha_1 - x_1 \cos \gamma_1;$$

also die Gleichungen:

$$(x_1 - x_0) \cos \beta_0 = (y_1 - y_0) \cos \alpha_0,$$

$$(y_1 - y_0) \cos \gamma_0 = (z_1 - z_0) \cos \beta_0,$$

$$(z_1 - z_0) \cos \alpha_0 = (x_1 - x_0) \cos \gamma_0$$

und:

$$(x_0 - x_1) \cos \beta_1 = (y_0 - y_1) \cos \alpha_1,$$

$$(y_0 - y_1) \cos \gamma_1 = (z_0 - z_1) \cos \beta_1,$$

$$(z_0 - z_1) \cos \alpha_1 = (x_0 - x_1) \cos \gamma_1;$$

oder die Gleichungen:

$$\frac{x_1 - x_0}{\cos \alpha_0} = \frac{y_1 - y_0}{\cos \beta_0} = \frac{z_1 - z_0}{\cos \gamma_0},$$

$$\frac{x_0 - x_1}{\cos \alpha_1} = \frac{y_0 - y_1}{\cos \beta_1} = \frac{z_0 - z_1}{\cos \gamma_1}.$$

Vergleicht man diese Gleichungen mit den Gleichungen 1),

Überzeugt man sich auf der Stelle, dass der in der Richtungslinie der Kraft  $P_1$  liegende Punkt  $(x_1, y_1, z_1)$  in der Richtungslinie der Kraft  $P_0$  und der in der Richtungslinie der Kraft  $P_0$  liegende Punkt  $(x_0, y_0, z_0)$  in der Richtungslinie der Kraft  $P_1$  liegt, so dass also die Richtungslinien der Kräfte  $P_0, P_1$  mit einander zusammenfallen.

Aus allem Bisherigen ergibt sich ganz unzweideutig, dass unter den gemachten Voraussetzungen die Kräfte  $P_0, P_1$  absolut gleich sind und nach direct entgegengesetzten Richtungen hin wirken, sich also im Gleichgewichte befinden; daher haben wir den folgenden Satz:

Wenn

$$\frac{x-x_0}{\cos \alpha_0} = \frac{y-y_0}{\cos \beta_0} = \frac{z-z_0}{\cos \gamma_0},$$

$$\frac{x-x_1}{\cos \alpha_1} = \frac{y-y_1}{\cos \beta_1} = \frac{z-z_1}{\cos \gamma_1}$$

die Gleichungen der Richtungslinien der Kräfte  $P_0, P_1$  sind, und die Gleichungen:

$$\Sigma P \cos \alpha = 0, \quad \Sigma P \cos \beta = 0, \quad \Sigma P \cos \gamma = 0;$$

$$\Sigma P(x \cos \beta - y \cos \alpha) = 0,$$

$$\Sigma P(y \cos \gamma - z \cos \beta) = 0,$$

$$\Sigma P(z \cos \alpha - x \cos \gamma) = 0$$

statt finden; so sind die beiden Kräfte  $P_0, P_1$  im Gleichgewichte.

Aus den beiden vorhergehenden Sätzen ergibt sich nun aber der folgende Satz:

Wenn die Gleichungen der Richtungslinien der zwei Kräfte  $P_0, P_1$ :

$$\frac{x-x_0}{\cos \alpha_0} = \frac{y-y_0}{\cos \beta_0} = \frac{z-z_0}{\cos \gamma_0},$$

$$\frac{x-x_1}{\cos \alpha_1} = \frac{y-y_1}{\cos \beta_1} = \frac{z-z_1}{\cos \gamma_1}$$

ist, so sind:

$$\Sigma P \cos \alpha = 0, \quad \Sigma P \cos \beta = 0, \quad \Sigma P \cos \gamma = 0;$$

$$\Sigma P(x \cos \beta - y \cos \alpha) = 0,$$

$$\Sigma P(y \cos \gamma - z \cos \beta) = 0,$$

$$\Sigma P(z \cos \alpha - x \cos \gamma) = 0$$

die nothwendigen Bedingungsgleichungen für Gleichgewicht dieser zwei Kräfte.

### §. 5.

#### Bedingungsgleichungen für das Gleichgewicht zwischen drei Kräften.

Wenn drei Kräfte  $P_0, P_1, P_2$  im Gleichgewichte sein müssen ihre Richtungslinien immer in einer Ebene liegen wollen einmal annehmen, die Richtungen der drei sich im Gleichgewichte befindenden Kräfte  $P_0, P_1, P_2$  lägen nicht in einer Ebene. Nehmen wir dann in den Richtungslinien drei  $A, A_1, A_2$  an, so liegen diese drei Punkte entweder in einer geraden Linie, oder dieselben liegen in einer Ebene. Wäre das Letztere der Fall, so würde immer noch eine der drei Richtungslinien nicht mit dieser Geraden verfallen, weil, wenn mit dieser Geraden alle drei Richtungen zusammenfielen, die drei Richtungslinien in einer Ebene wären, was gegen die Annahme ist. Fällt nur eine der Richtungslinien der Kraft  $P_2$  nicht mit der in Rede stehenden zusammen, so nehme man in dieser Richtungslinie einen verschiedenen Punkt  $A_2$  an, dann sind  $A, A_1, A_2$  drei in der Richtungslinie der drei Kräfte, die nicht in einer Ebene liegen, so dass nur noch in der Richtungslinie der Kräfte immer drei nicht in gerader Linie liegende und sich nicht bildende Punkte annehmen kann, welche wir nun durch  $A, A_1, A_2$  bezeichnen wollen. Nun muss es in der Richtungslinie immer mindestens 2 in gerader Linie liegende Punkte des Punktes  $A, A_1, A_2$  liegen, weil in entgegen gesetzten Fällen alle drei Richtungslinien in einer Ebene liegen was gegen die Annahme ist. Diese Kräfte liegen aber nicht in der Ebene des Punktes  $A, A_1, A_2$  liegt, so dass bei der Voraussetzung die Kräfte  $P_0, P_1, P_2$  im Gleichgewichte sind, so muss das System auch dann noch im Gleichgewichte sein, wenn man sich  $A, A_1, A_2$  als eine feste Linie denkt. In  $A_2$  aber liegen Richtungslinie noch in der Ebene des Punktes  $A, A_1, A_2$  liegt, dann man in Punkte  $A_2$  in zwei Kräfte zerlegen kann die eine in der Ebene  $A, A_1, A_2$  liegt, die



den kann, so dass also hierdurch unsere obige Behauptung vollständig bewiesen ist.

Die Gleichungen der Richtungslinien der drei Kräfte  $P_0$ ,  $P_1$ ,  $P_2$  seien beziehungsweise:

$$1) \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} \frac{x-x_0}{\cos \alpha_0} = \frac{y-y_0}{\cos \beta_0} = \frac{z-z_0}{\cos \gamma_0}, \\ \frac{x-x_1}{\cos \alpha_1} = \frac{y-y_1}{\cos \beta_1} = \frac{z-z_1}{\cos \gamma_1}, \\ \frac{x-x_2}{\cos \alpha_2} = \frac{y-y_2}{\cos \beta_2} = \frac{z-z_2}{\cos \gamma_2}; \end{array} \right.$$

wobei wir annehmen wollen, dass diese Richtungslinien nicht sämmtlich unter einander zusammenfallen, unter welcher Voraussetzung sich in denselben offenbar immer drei nicht in gerader Linie liegende, also ein Dreieck bestimmende Punkte  $A_0$ ,  $A_1$ ,  $A_2$  annehmen lassen, deren Coordinaten wir durch  $\xi_0, \eta_0, \zeta_0$ ;  $\xi_1, \eta_1, \zeta_1$ ;  $\xi_2, \eta_2, \zeta_2$  bezeichnen wollen, und in die wir die Kräfte  $P_0$ ,  $P_1$ ,  $P_2$  versetzt denken können.

Unter der Voraussetzung, dass die drei Kräfte  $P_0$ ,  $P_1$ ,  $P_2$  unter einander im Gleichgewichte sind, müssen nach dem Obigen ihre Richtungslinien in einer Ebene liegen, und diese Ebene muss also mit der Ebene des Dreiecks  $A_0 A_1 A_2$  zusammenfallen.

Die als positiv betrachteten Seiten

$$A_0 A_1, \quad A_1 A_2, \quad A_2 A_0$$

des Dreiecks  $A_0 A_1 A_2$  bezeichnen wir beziehungsweise durch

$$r_{01}, \quad r_{12}, \quad r_{20}.$$

Die in dem Punkte  $A_0$  wirkende Kraft  $P_0$  zerlegen wir in zwei Kräfte nach den Richtungslinien  $A_0 A_1$  und  $A_2 A_0$ , und bezeichnen dieselben, indem wir sie als positiv oder negativ betrachten, jenachdem sie von  $A_0$  nach  $A_1$  und  $A_2$  oder nach den entgegengesetzten Seiten hin wirken, durch  $P_{01}$  und  $P_{02}$ ; dann ist nach §. 2. 13):

$$2) \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} P_0 \cos \alpha_0 = P_{01} \frac{\xi_1 - \xi_0}{r_{01}} + P_{02} \frac{\xi_2 - \xi_0}{r_{20}}, \\ P_0 \cos \beta_0 = P_{01} \frac{\eta_1 - \eta_0}{r_{01}} + P_{02} \frac{\eta_2 - \eta_0}{r_{20}}, \\ P_0 \cos \gamma_0 = P_{01} \frac{\zeta_1 - \zeta_0}{r_{01}} + P_{02} \frac{\zeta_2 - \zeta_0}{r_{20}}. \end{array} \right.$$





Weil nun aber nach der Voraussetzung die Kräfte  $P_0, P_1, P_2$  im Gleichgewichte sind, so ist nach dem oben Bewiesenen mit Rücksicht auf die vorher gegebenen Bestimmungen:

$$P_{01} = P_{10}, \quad P_{12} = P_{21}, \quad P_{20} = P_{02};$$

also nach vorstehenden Gleichungen:

$$5) \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} P_0 \cos \alpha_0 + P_1 \cos \alpha_1 + P_2 \cos \alpha_2 = 0, \\ P_0 \cos \beta_0 + P_1 \cos \beta_1 + P_2 \cos \beta_2 = 0, \\ P_0 \cos \gamma_0 + P_1 \cos \gamma_1 + P_2 \cos \gamma_2 = 0. \end{array} \right.$$

Ferner erhält man aus den Gleichungen 2), 3), 4):

$$P_0(\xi_0 \cos \beta_0 - \eta_0 \cos \alpha_0) = P_{01} \left\{ \frac{\xi_0(\eta_1 - \eta_0)}{r_{01}} - \frac{\eta_0(\xi_1 - \xi_0)}{r_{01}} \right\} + P_{02} \left\{ \frac{\xi_0(\eta_2 - \eta_0)}{r_{20}} - \frac{\eta_0(\xi_2 - \xi_0)}{r_{20}} \right\},$$

$$P_1(\xi_1 \cos \beta_1 - \eta_1 \cos \alpha_1) = P_{12} \left\{ \frac{\xi_1(\eta_2 - \eta_1)}{r_{12}} - \frac{\eta_1(\xi_2 - \xi_1)}{r_{12}} \right\} + P_{10} \left\{ \frac{\xi_1(\eta_0 - \eta_1)}{r_{01}} - \frac{\eta_1(\xi_0 - \xi_1)}{r_{01}} \right\},$$

$$P_2(\xi_2 \cos \beta_2 - \eta_2 \cos \alpha_2) = P_{20} \left\{ \frac{\xi_2(\eta_0 - \eta_2)}{r_{20}} - \frac{\eta_2(\xi_0 - \xi_2)}{r_{20}} \right\} + P_{21} \left\{ \frac{\xi_2(\eta_1 - \eta_2)}{r_{12}} - \frac{\eta_2(\xi_1 - \xi_2)}{r_{12}} \right\};$$

also, wenn man addirt, weil:

$$P_{01} = P_{10}, \quad P_{12} = P_{21}, \quad P_{20} = P_{02}$$

ist:

$$\left. \begin{array}{l} P_0(\xi_0 \cos \beta_0 - \eta_0 \cos \alpha_0) \\ + P_1(\xi_1 \cos \beta_1 - \eta_1 \cos \alpha_1) \\ + P_2(\xi_2 \cos \beta_2 - \eta_2 \cos \alpha_2) \end{array} \right\} = 0;$$

weil nun aber nach 1):

$$\frac{\xi_0 - x_0}{\cos \alpha_0} = \frac{\eta_0 - y_0}{\cos \beta_0} = \frac{\zeta_0 - z_0}{\cos \gamma_0},$$

$$\frac{\xi_1 - x_1}{\cos \alpha_1} = \frac{\eta_1 - y_1}{\cos \beta_1} = \frac{\zeta_1 - z_1}{\cos \gamma_1},$$

$$\frac{\xi_2 - x_2}{\cos \alpha_2} = \frac{\eta_2 - y_2}{\cos \beta_2} = \frac{\zeta_2 - z_2}{\cos \gamma_2}$$

d folglich:

$$\xi_0 \cos \beta_0 - \eta_0 \cos \alpha_0 = x_0 \cos \beta_0 - y_0 \cos \alpha_0,$$

$$\xi_1 \cos \beta_1 - \eta_1 \cos \alpha_1 = x_1 \cos \beta_1 - y_1 \cos \alpha_1,$$

$$\xi_2 \cos \beta_2 - \eta_2 \cos \alpha_2 = x_2 \cos \beta_2 - y_2 \cos \alpha_2$$

, so ist nach dem Obigen:

$$\left. \begin{aligned} &P_0(x_0 \cos \beta_0 - y_0 \cos \alpha_0) \\ &+ P_1(x_1 \cos \beta_1 - y_1 \cos \alpha_1) \\ &+ P_2(x_2 \cos \beta_2 - y_2 \cos \alpha_2) \end{aligned} \right\} = 0,$$

und wir haben daher jetzt überhaupt die folgenden Gleichungen:

6)

$$\left. \begin{aligned} &P_0(x_0 \cos \beta_0 - y_0 \cos \alpha_0) \\ &+ P_1(x_1 \cos \beta_1 - y_1 \cos \alpha_1) \\ &+ P_2(x_2 \cos \beta_2 - y_2 \cos \alpha_2) \end{aligned} \right\} = 0,$$

$$\left. \begin{aligned} &P_0(y_0 \cos \gamma_0 - z_0 \cos \beta_0) \\ &+ P_1(y_1 \cos \gamma_1 - z_1 \cos \beta_1) \\ &+ P_2(y_2 \cos \gamma_2 - z_2 \cos \beta_2) \end{aligned} \right\} = 0,$$

$$\left. \begin{aligned} &P_0(z_0 \cos \alpha_0 - x_0 \cos \gamma_0) \\ &+ P_1(z_1 \cos \alpha_1 - x_1 \cos \gamma_1) \\ &+ P_2(z_2 \cos \alpha_2 - x_2 \cos \gamma_2) \end{aligned} \right\} = 0.$$

Aus den Gleichungen 5) und 6) ergibt sich jetzt also der folgende Satz:

Wenn die drei Kräfte  $P_0$ ,  $P_1$ ,  $P_2$ , deren nicht sämtlich zusammenfallende Richtungslinien durch die Gleichungen:

$$\frac{x-x_0}{\cos \alpha_0} = \frac{y-y_0}{\cos \beta_0} = \frac{z-z_0}{\cos \gamma_0},$$

$$\frac{x-x_1}{\cos \alpha_1} = \frac{y-y_1}{\cos \beta_1} = \frac{z-z_1}{\cos \gamma_1},$$

$$\frac{x-x_2}{\cos \alpha_2} = \frac{y-y_2}{\cos \beta_2} = \frac{z-z_2}{\cos \gamma_2}$$

charakterisirt werden, unter einander im Gleichgewichte sind; so ist immer:

$$P_0 \cos \alpha_0 + P_1 \cos \alpha_1 + P_2 \cos \alpha_2 = 0,$$

$$P_0 \cos \beta_0 + P_1 \cos \beta_1 + P_2 \cos \beta_2 = 0,$$

$$P_0 \cos \gamma_0 + P_1 \cos \gamma_1 + P_2 \cos \gamma_2 = 0$$

und:

$$\left. \begin{aligned} &P_0(x_0 \cos \beta_0 - y_0 \cos \alpha_0) \\ &+ P_1(x_1 \cos \beta_1 - y_1 \cos \alpha_1) \\ &+ P_2(x_2 \cos \beta_2 - y_2 \cos \alpha_2) \end{aligned} \right\} = 0,$$

$$\left. \begin{aligned} &P_0(y_0 \cos \gamma_0 - z_0 \cos \beta_0) \\ &+ P_1(y_1 \cos \gamma_1 - z_1 \cos \beta_1) \\ &+ P_2(y_2 \cos \gamma_2 - z_2 \cos \beta_2) \end{aligned} \right\} = 0,$$

$$\left. \begin{aligned} &P_0(z_0 \cos \alpha_0 - x_0 \cos \gamma_0) \\ &+ P_1(z_1 \cos \alpha_1 - x_1 \cos \gamma_1) \\ &+ P_2(z_2 \cos \alpha_2 - x_2 \cos \gamma_2) \end{aligned} \right\} = 0;$$

oder in abkürzender Schreibweise:

$$\Sigma P \cos \alpha = 0, \quad \Sigma P \cos \beta = 0, \quad \Sigma P \cos \gamma = 0;$$

$$\Sigma P(x \cos \beta - y \cos \alpha) = 0,$$

$$\Sigma P(y \cos \gamma - z \cos \beta) = 0,$$

$$\Sigma P(z \cos \alpha - x \cos \gamma) = 0.$$

Wir wollen nun untersuchen, ob sich dieser Satz auch umkehren lässt, nämlich: ob, wenn diese sechs Gleichungen erfüllt sind, sich immer schliessen lässt, dass dann die Kräfte  $P_0$ ,  $P_1$ ,  $P_2$

unter einander im Gleichgewichte sind, wobei alle Grössen die ihnen im Vorhergehenden beigelegten Bedeutungen behalten sollen.

Zuerst bemerken wir, dass, wenn die sechs obigen Gleichungen erfüllt sind, dann immer auch die sechs Gleichungen:

7)

$$\Sigma P \cos \alpha = 0, \quad \Sigma P \cos \beta = 0, \quad \Sigma P \cos \gamma = 0;$$

$$\Sigma P(\xi \cos \beta - \eta \cos \alpha) = 0,$$

$$\Sigma P(\eta \cos \gamma - \xi \cos \beta) = 0,$$

$$\Sigma P(\xi \cos \alpha - \xi \cos \gamma) = 0$$

erfüllt sind, was aus dem Vorhergehenden ohne Weiteres und ganz von selbst hervorgeht.

Wenn wir die Gleichungen:

$$P_0 \cos \alpha_0 + P_1 \cos \alpha_1 + P_2 \cos \alpha_2 = 0,$$

$$P_0 \cos \beta_0 + P_1 \cos \beta_1 + P_2 \cos \beta_2 = 0,$$

$$P_0 \cos \gamma_0 + P_1 \cos \gamma_1 + P_2 \cos \gamma_2 = 0$$

nach der Reihe mit:

$$\cos \beta_1 \cos \gamma_2 - \cos \gamma_1 \cos \beta_2,$$

$$\cos \gamma_1 \cos \alpha_2 - \cos \alpha_1 \cos \gamma_2,$$

$$\cos \alpha_1 \cos \beta_2 - \cos \beta_1 \cos \alpha_2;$$

oder mit:

$$\cos \beta_2 \cos \gamma_0 - \cos \gamma_2 \cos \beta_0,$$

$$\cos \gamma_2 \cos \alpha_0 - \cos \alpha_2 \cos \gamma_0,$$

$$\cos \alpha_2 \cos \beta_0 - \cos \beta_2 \cos \alpha_0;$$

oder mit:

$$\cos \beta_0 \cos \gamma_1 - \cos \gamma_0 \cos \beta_1,$$

$$\cos \gamma_0 \cos \alpha_1 - \cos \alpha_0 \cos \gamma_1,$$

$$\cos \alpha_0 \cos \beta_1 - \cos \beta_0 \cos \alpha_1.$$

multipliciren, und dann zu einander addiren; so erhalten wir die Gleichungen:

$$P_0 N = 0, \quad P_1 N = 0, \quad P_2 N = 0;$$

wo  $N$  die aus §. 3. bekannte Bedeutung hat; aus denen, wenn nur nicht, wie wir natürlich anzunehmen berechtigt sind, alle drei Kräfte verschwinden, jedenfalls

$$N = 0$$

folgt, woraus sich ergibt, dass die Richtungslinien der drei Kräfte in einer Ebene liegen.

Nehmen wir nun ganz dieselben Kräftezerlegungen vor wie früher, so erhalten wir die Ausdrücke:

$$P_0 \cos \alpha_0 = P_{01} \frac{\xi_1 - \xi_0}{r_{01}} + P_{02} \frac{\xi_2 - \xi_0}{r_{20}},$$

$$P_0 \cos \beta_0 = P_{01} \frac{\eta_1 - \eta_0}{r_{01}} + P_{02} \frac{\eta_2 - \eta_0}{r_{20}},$$

$$P_0 \cos \gamma_0 = P_{01} \frac{\zeta_1 - \zeta_0}{r_{01}} + P_{02} \frac{\zeta_2 - \zeta_0}{r_{20}};$$

$$P_1 \cos \alpha_1 = P_{12} \frac{\xi_2 - \xi_1}{r_{12}} + P_{10} \frac{\xi_0 - \xi_1}{r_{01}},$$

$$P_1 \cos \beta_1 = P_{12} \frac{\eta_2 - \eta_1}{r_{12}} + P_{10} \frac{\eta_0 - \eta_1}{r_{01}},$$

$$P_1 \cos \gamma_1 = P_{12} \frac{\zeta_2 - \zeta_1}{r_{12}} + P_{10} \frac{\zeta_0 - \zeta_1}{r_{01}};$$

$$P_2 \cos \alpha_2 = P_{20} \frac{\xi_0 - \xi_2}{r_{20}} + P_{21} \frac{\xi_1 - \xi_2}{r_{12}},$$

$$P_2 \cos \beta_2 = P_{20} \frac{\eta_0 - \eta_2}{r_{20}} + P_{21} \frac{\eta_1 - \eta_2}{r_{12}},$$

$$P_2 \cos \gamma_2 = P_{20} \frac{\zeta_0 - \zeta_2}{r_{20}} + P_{21} \frac{\zeta_1 - \zeta_2}{r_{12}};$$

welche, für

$$P_0 \cos \alpha_0, P_0 \cos \beta_0, P_0 \cos \gamma_0; P_1 \cos \alpha_1, P_1 \cos \beta_1, P_1 \cos \gamma_1; \\ P_2 \cos \alpha_2, P_2 \cos \beta_2, P_2 \cos \gamma_2$$

in die Gleichungen 7) gesetzt, zu den folgenden Gleichungen führen:

$$(P_{01} - P_{10}) \frac{\xi_0 - \xi_1}{r_{01}} + (P_{12} - P_{21}) \frac{\xi_1 - \xi_2}{r_{12}} + (P_{20} - P_{02}) \frac{\xi_2 - \xi_0}{r_{20}} = 0,$$

$$(P_{01} - P_{10}) \frac{\eta_0 - \eta_1}{r_{01}} + (P_{12} - P_{21}) \frac{\eta_1 - \eta_2}{r_{12}} + (P_{20} - P_{02}) \frac{\eta_2 - \eta_0}{r_{20}} = 0,$$

$$(P_{01} - P_{10}) \frac{\zeta_0 - \zeta_1}{r_{01}} + (P_{12} - P_{21}) \frac{\zeta_1 - \zeta_2}{r_{12}} + (P_{20} - P_{02}) \frac{\zeta_2 - \zeta_0}{r_{20}} = 0$$

und:

$$(P_{01} - P_{10}) \frac{\xi_0 \eta_1 - \eta_0 \xi_1}{r_{01}} + (P_{12} - P_{21}) \frac{\xi_1 \eta_2 - \eta_1 \xi_2}{r_{12}} + (P_{20} - P_{02}) \frac{\xi_2 \eta_0 - \eta_2 \xi_0}{r_{20}} = 0,$$

$$(P_{01} - P_{10}) \frac{\eta_0 \xi_1 - \xi_0 \eta_1}{r_{01}} + (P_{12} - P_{21}) \frac{\eta_1 \xi_2 - \xi_1 \eta_2}{r_{12}} + (P_{20} - P_{02}) \frac{\eta_2 \xi_0 - \xi_2 \eta_0}{r_{20}} = 0,$$

$$(P_{01} - P_{10}) \frac{\xi_0 \xi_1 - \xi_0 \xi_1}{r_{01}} + (P_{12} - P_{21}) \frac{\xi_1 \xi_2 - \xi_1 \xi_2}{r_{12}} + (P_{20} - P_{02}) \frac{\xi_2 \xi_0 - \xi_2 \xi_0}{r_{20}} = 0.$$

Aus drei Gleichungen von der Form:

$$a_0 x + b_0 y + c_0 z = 0,$$

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z = 0,$$

$$a_2 x + b_2 y + c_2 z = 0$$

ergeben sich bekanntlich immer die drei Gleichungen:

$$\{a_0(b_1 c_2 - c_1 b_2) + a_1(b_2 c_0 - c_2 b_0) + a_2(b_0 c_1 - c_0 b_1)\} x = 0,$$

$$\{a_0(b_1 c_2 - c_1 b_2) + a_1(b_2 c_0 - c_2 b_0) + a_2(b_0 c_1 - c_0 b_1)\} y = 0,$$

$$\{a_0(b_1 c_2 - c_1 b_2) + a_1(b_2 c_0 - c_2 b_0) + a_2(b_0 c_1 - c_0 b_1)\} z = 0.$$

Verbinden wir nun die drei Gleichungen:

$$(P_{01} - P_{10}) \frac{\xi_0 - \xi_1}{r_{01}} + (P_{12} - P_{21}) \frac{\xi_1 - \xi_2}{r_{12}} + (P_{20} - P_{02}) \frac{\xi_2 - \xi_0}{r_{20}} = 0;$$

$$(P_{01} - P_{10}) \frac{\eta_0 - \eta_1}{r_{01}} + (P_{12} - P_{21}) \frac{\eta_1 - \eta_2}{r_{12}} + (P_{20} - P_{02}) \frac{\eta_2 - \eta_0}{r_{20}} = 0,$$

$$(P_{01} - P_{10}) \frac{\xi_0 \eta_1 - \eta_0 \xi_1}{r_{01}} + (P_{12} - P_{21}) \frac{\xi_1 \eta_2 - \eta_1 \xi_2}{r_{12}} + (P_{20} - P_{02}) \frac{\xi_2 \eta_0 - \eta_2 \xi_0}{r_{20}} = 0$$

mit einander, und bemerken, dass:

$$\begin{aligned} & (\xi_0 - \xi_1) \{ (\eta_1 - \eta_2) (\xi_2 \eta_0 - \eta_2 \xi_0) - (\eta_2 - \eta_0) (\xi_1 \eta_2 - \eta_1 \xi_2) \} \\ & + (\eta_0 - \eta_1) \{ (\xi_1 \eta_2 - \eta_1 \xi_2) (\xi_2 - \xi_0) - (\xi_2 \eta_0 - \eta_2 \xi_0) (\xi_1 - \xi_2) \} \\ & + (\xi_0 \eta_1 - \eta_0 \xi_1) \{ (\xi_1 - \xi_2) (\eta_2 - \eta_0) - (\xi_2 - \xi_0) (\eta_1 - \eta_2) \} \\ = & (\xi_0 \eta_1 - \eta_0 \xi_1) \{ (\xi_1 - \xi_2) (\eta_2 - \eta_0) - (\xi_2 - \xi_0) (\eta_1 - \eta_2) \} \\ & + (\xi_1 \eta_2 - \eta_1 \xi_2) \{ (\xi_2 - \xi_0) (\eta_0 - \eta_1) - (\xi_0 - \xi_1) (\eta_2 - \eta_0) \} \\ & + (\xi_2 \eta_0 - \eta_2 \xi_0) \{ (\xi_0 - \xi_1) (\eta_1 - \eta_2) - (\xi_1 - \xi_2) (\eta_0 - \eta_1) \} \\ = & (\xi_0 \eta_1 - \eta_0 \xi_1) \{ \xi_0 (\eta_1 - \eta_2) + \xi_1 (\eta_2 - \eta_0) + \xi_2 (\eta_0 - \eta_1) \} \\ & + (\xi_1 \eta_2 - \eta_1 \xi_2) \{ \xi_0 (\eta_1 - \eta_2) + \xi_1 (\eta_2 - \eta_0) + \xi_2 (\eta_0 - \eta_1) \} \\ & + (\xi_2 \eta_0 - \eta_2 \xi_0) \{ \xi_0 (\eta_1 - \eta_2) + \xi_1 (\eta_2 - \eta_0) + \xi_2 (\eta_0 - \eta_1) \} \\ = & \{ \xi_0 (\eta_1 - \eta_2) + \xi_1 (\eta_2 - \eta_0) + \xi_2 (\eta_0 - \eta_1) \}^2 \end{aligned}$$

ist; so erhalten wir die folgenden Gleichungen:

$$(P_{01} - P_{10}) \{ \xi_0 (\eta_1 - \eta_2) + \xi_1 (\eta_2 - \eta_0) + \xi_2 (\eta_0 - \eta_1) \}^2 = 0;$$

$$(P_{12} - P_{21}) \{ \xi_0 (\eta_1 - \eta_2) + \xi_1 (\eta_2 - \eta_0) + \xi_2 (\eta_0 - \eta_1) \}^2 = 0,$$

$$(P_{20} - P_{02}) \{ \xi_0 (\eta_1 - \eta_2) + \xi_1 (\eta_2 - \eta_0) + \xi_2 (\eta_0 - \eta_1) \}^2 = 0.$$

Durch ganz ähnliche Verbindungen dreier Gleichungen, wie so eben, erhalten wir aber, wenn der Kürze wegen:

$$[\xi\eta] = \xi_0 (\eta_1 - \eta_2) + \xi_1 (\eta_2 - \eta_0) + \xi_2 (\eta_0 - \eta_1),$$

$$[\eta\xi] = \eta_0 (\xi_1 - \xi_2) + \eta_1 (\xi_2 - \xi_0) + \eta_2 (\xi_0 - \xi_1),$$

$$[\xi\xi] = \xi_0 (\xi_1 - \xi_2) + \xi_1 (\xi_2 - \xi_0) + \xi_2 (\xi_0 - \xi_1)$$

gesetzt wird, überhaupt die folgenden Gleichungen:



$$(P_{01} - P_{10})[\xi\eta]^2 = (P_{12} - P_{21})[\xi\eta]^2 = (P_{20} - P_{02})[\xi\eta]^2 = 0,$$

$$(P_{01} - P_{10})[\eta\xi]^2 = (P_{12} - P_{21})[\eta\xi]^2 = (P_{20} - P_{02})[\eta\xi]^2 = 0,$$

$$(P_{01} - P_{10})[\xi\xi]^2 = (P_{12} - P_{21})[\xi\xi]^2 = (P_{20} - P_{02})[\xi\xi]^2 = 0.$$

Die absoluten Werthe der Grössen

$$[\xi\eta], [\eta\xi], [\xi\xi]$$

sind bekanntlich die Projectionen des Dreiecks  $A_0A_1A_2$  auf den Ebenen der

$$xy, yz, zx;$$

und weil nun nach einem bekannten Satze

$$\overline{A_0A_1A_2}^2 = [\xi\eta]^2 + [\eta\xi]^2 + [\xi\xi]^2$$

ist, der Flächeninhalt des Dreiecks  $A_0A_1A_2$  aber, insofern wir wieder annehmen, dass die Richtungslinien der drei Kräfte nicht zusammenfallen, nicht verschwindet, so können offenbar die Grössen

$$[\xi\eta], [\eta\xi], [\xi\xi]$$

nicht zugleich verschwinden, es muss wenigstens eine nicht verschwinden; daher muss in Folge der obigen Gleichungen jederzeit

$$P_{01} - P_{10} = 0, \quad P_{12} - P_{21} = 0, \quad P_{20} - P_{02} = 0$$

oder

$$P_{01} = P_{10}, \quad P_{12} = P_{21}, \quad P_{20} = P_{02}$$

sein, woraus sich unmittelbar ergibt, dass die Kräfte

$$P_{01}, P_{10}; \quad P_{12}, P_{21}; \quad P_{20}, P_{02}$$

absolut gleich und direct entgegengesetzt, folglich die Kräfte  $P_0, P_1, P_2$  im Gleichgewichte sind. Daher haben wir den folgenden Satz:

Wenn:

$$\frac{x-x_0}{\cos \alpha_0} = \frac{y-y_0}{\cos \beta_0} = \frac{z-z_0}{\cos \gamma_0},$$

$$\frac{x-x_1}{\cos \alpha_1} = \frac{y-y_1}{\cos \beta_1} = \frac{z-z_1}{\cos \gamma_1},$$

$$\frac{x-x_2}{\cos \alpha_2} = \frac{y-y_2}{\cos \beta_2} = \frac{z-z_2}{\cos \gamma_2}$$

die Gleichungen der nicht sämmtlich zusammenfallenden Richtungslinien der drei Kräfte  $P_0, P_1, P_2$  sind, sind die Gleichungen:

$$\Sigma P \cos \alpha = 0, \quad \Sigma P \cos \beta = 0, \quad \Sigma P \cos \gamma = 0;$$

$$\Sigma P(x \cos \beta - y \cos \alpha) = 0,$$

$$\Sigma P(y \cos \gamma - z \cos \beta) = 0,$$

$$\Sigma P(z \cos \alpha - x \cos \gamma) = 0$$

Statt finden; so sind die drei Kräfte  $P_0, P_1, P_2$  u einander im Gleichgewichte.

In Folge der beiden vorher bewiesenen Sätze lässt sich aber der folgende Satz aussprechen:

Wenn die Gleichungen der nicht sämmtlich zusammenfallenden Richtungslinien der drei Kräfte  $P_0, P_1$

$$\frac{x - x_0}{\cos \alpha_0} = \frac{y - y_0}{\cos \beta_0} = \frac{z - z_0}{\cos \gamma_0},$$

$$\frac{x - x_1}{\cos \alpha_1} = \frac{y - y_1}{\cos \beta_1} = \frac{z - z_1}{\cos \gamma_1},$$

$$\frac{x - x_2}{\cos \alpha_2} = \frac{y - y_2}{\cos \beta_2} = \frac{z - z_2}{\cos \gamma_2}$$

sind; so sind:

$$\Sigma P \cos \alpha = 0, \quad \Sigma P \cos \beta = 0, \quad \Sigma P \cos \gamma = 0;$$

$$\Sigma P(x \cos \beta - y \cos \alpha) = 0,$$

$$\Sigma P(y \cos \gamma - z \cos \beta) = 0,$$

$$\Sigma P(z \cos \alpha - x \cos \gamma) = 0$$

die **nothwendigen** Bedingungsgleichungen für Gleichgewicht dieser drei Kräfte.

Wir haben noch den Fall zu betrachten, wenn die Richtungslinien der drei Kräfte  $P_0, P_1, P_2$  mit einander zusammenfallen, in welchem das Gleichgewicht der drei Kräfte offenbar dadurch vollständig bedingt wird, dass zwei dieser Kräfte in der gemeinschaftlichen Richtungslinie nach einer Seite hin wirken, dritte nach der entgegengesetzten Seite hin wirkt, und dass Summe der beiden ersten absolut genommenen Kräfte der dritten absolut genommenen Kraft gleich ist. Nehmen wir nun, um Begriffe zu fixiren, an, dass die beiden Kräfte  $P_0, P_1$  in einer Seite hin wirken, die dritte Kraft  $P_2$  nach der entgegen-

esetzten Seite hin wirkt, und unterscheiden die folgenden, rücksichtlich der Vorzeichen der Kräfte möglichen Fälle:

	$P_0$	$P_1$	$P_2$
$\left\{ \begin{array}{l} \text{positiv} \\ \text{negativ} \end{array} \right.$		$\left\{ \begin{array}{l} \text{positiv} \\ \text{negativ} \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{positiv} \\ \text{negativ} \end{array} \right.$
$\left\{ \begin{array}{l} \text{positiv} \\ \text{negativ} \end{array} \right.$		$\left\{ \begin{array}{l} \text{positiv} \\ \text{negativ} \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{negativ} \\ \text{positiv} \end{array} \right.$
$\left\{ \begin{array}{l} \text{positiv} \\ \text{negativ} \end{array} \right.$		$\left\{ \begin{array}{l} \text{negativ} \\ \text{positiv} \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{positiv} \\ \text{negativ} \end{array} \right.$
$\left\{ \begin{array}{l} \text{positiv} \\ \text{negativ} \end{array} \right.$		$\left\{ \begin{array}{l} \text{negativ} \\ \text{positiv} \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{negativ} \\ \text{positiv} \end{array} \right.$

ist die Bedingungsgleichung für den Zustand des Gleichgewichts der drei Kräfte offenbar beziehungsweise:

$$P_0 + P_1 - P_2 = 0,$$

$$P_0 + P_1 + P_2 = 0,$$

$$P_0 - P_1 - P_2 = 0,$$

$$P_0 - P_1 + P_2 = 0;$$

zwischen den Winkeln

$$\alpha_0, \beta_0, \gamma_0; \alpha_1, \beta_1, \gamma_1; \alpha_2, \beta_2, \gamma_2$$

gilt die folgenden Beziehungen Statt:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_0 = \alpha_1 = 180^\circ - \alpha_2, \\ \beta_0 = \beta_1 = 180^\circ - \beta_2, \\ \gamma_0 = \gamma_1 = 180^\circ - \gamma_2; \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2, \\ \beta_0 = \beta_1 = \beta_2, \\ \gamma_0 = \gamma_1 = \gamma_2; \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_0 = 180^\circ - \alpha_1 = 180^\circ - \alpha_2, \\ \beta_0 = 180^\circ - \beta_1 = 180^\circ - \beta_2, \\ \gamma_0 = 180^\circ - \gamma_1 = 180^\circ - \gamma_2; \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} \alpha_0 = 180^\circ - \alpha_1 = \alpha_2, \\ \beta_0 = 180^\circ - \beta_1 = \beta_2, \\ \gamma_0 = 180^\circ - \gamma_1 = \gamma_2; \end{cases}$$

folglich zwischen den Cosinussen dieser Winkel die folgenden Beziehungen:

$$\begin{cases} \cos \alpha_0 = \cos \alpha_1 = -\cos \alpha_2, \\ \cos \beta_0 = \cos \beta_1 = -\cos \beta_2, \\ \cos \gamma_0 = \cos \gamma_1 = -\cos \gamma_2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos \alpha_0 = \cos \alpha_1 = \cos \alpha_2, \\ \cos \beta_0 = \cos \beta_1 = \cos \beta_2, \\ \cos \gamma_0 = \cos \gamma_1 = \cos \gamma_2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos \alpha_0 = -\cos \alpha_1 = -\cos \alpha_2, \\ \cos \beta_0 = -\cos \beta_1 = -\cos \beta_2, \\ \cos \gamma_0 = -\cos \gamma_1 = -\cos \gamma_2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos \alpha_0 = -\cos \alpha_1 = \cos \alpha_2, \\ \cos \beta_0 = -\cos \beta_1 = \cos \beta_2, \\ \cos \gamma_0 = -\cos \gamma_1 = \cos \gamma_2. \end{cases}$$

Werden nun in den einzelnen hier betrachteten Fällen die Gleichungen:

$$P_0 + P_1 - P_2 = 0,$$

$$P_0 + P_1 + P_2 = 0,$$

$$P_0 - P_1 - P_2 = 0,$$

$$P_0 - P_1 + P_2 = 0$$

als erfüllt vorausgesetzt, so folgen daraus durch Multiplication mit den obigen Cosinussen in allen Fällen die Gleichungen:

$$P_0 \cos \alpha_0 + P_1 \cos \alpha_1 + P_2 \cos \alpha_2 = 0,$$

$$P_0 \cos \beta_0 + P_1 \cos \beta_1 + P_2 \cos \beta_2 = 0,$$

$$P_0 \cos \gamma_0 + P_1 \cos \gamma_1 + P_2 \cos \gamma_2 = 0.$$

Werden umgekehrt die Gleichungen:

$$P_0 \cos \alpha_0 + P_1 \cos \alpha_1 + P_2 \cos \alpha_2 = 0,$$

$$P_0 \cos \beta_0 + P_1 \cos \beta_1 + P_2 \cos \beta_2 = 0,$$

$$P_0 \cos \gamma_0 + P_1 \cos \gamma_1 + P_2 \cos \gamma_2 = 0$$

als erfüllt vorausgesetzt; so hat man vor allen Dingen zu beachten, dass wegen der Gleichung

$$\cos^2 \alpha_0 + \cos^2 \beta_0 + \cos^2 \gamma_0 = 1$$

denfalls mindestens in einer der drei folgenden Reihen:

$$\cos \alpha_0, \cos \alpha_1, \cos \alpha_2;$$

$$\cos \beta_0, \cos \beta_1, \cos \beta_2;$$

$$\cos \gamma_0, \cos \gamma_1, \cos \gamma_2$$

ke absolut gleichen Grössen nicht verschwinden, und dass also es den als erfüllt vorausgesetzten drei Gleichungen mit Rücksicht auf die obigen zwischen den Cosinussen Statt findenden Relationen jederzeit durch Division respective die Gleichungen:

$$P_0 + P_1 - P_2 = 0,$$

$$P_0 + P_1 + P_2 = 0,$$

$$P_0 - P_1 - P_2 = 0,$$

$$P_0 - P_1 + P_2 = 0$$

folgen.

Hieraus ergibt sich, dass im vorliegenden Falle das Gleichgewicht zwischen den drei Kräften  $P_0$ ,  $P_1$ ,  $P_2$  vollständig durch die drei Gleichungen:

$$P_0 \cos \alpha_0 + P_1 \cos \alpha_1 + P_2 \cos \alpha_2 = 0,$$

$$P_0 \cos \beta_0 + P_1 \cos \beta_1 + P_2 \cos \beta_2 = 0,$$

$$P_0 \cos \gamma_0 + P_1 \cos \gamma_1 + P_2 \cos \gamma_2 = 0$$

bedingt wird.

Setzen wir nun aber diese Gleichungen als erfüllt voraus, ist:

$$\begin{aligned}
& P_0(x_0 \cos \beta_0 - y_0 \cos \alpha_0) \\
& + P_1(x_1 \cos \beta_1 - y_1 \cos \alpha_1) \\
& + P_2(x_2 \cos \beta_2 - y_2 \cos \alpha_2) \\
= & + P_0(x_0 \cos \beta_0 - y_0 \cos \alpha_0) \\
& + P_1(x_1 \cos \beta_1 - y_1 \cos \alpha_1) \\
& - (P_0 \cos \beta_0 + P_1 \cos \beta_1)x_2 + (P_0 \cos \alpha_0 + P_1 \cos \alpha_1)y_2 \\
= & P_0\{(x_0 - x_2) \cos \beta_0 - (y_0 - y_2) \cos \alpha_0\} \\
& + P_1\{(x_1 - x_2) \cos \beta_1 - (y_1 - y_2) \cos \alpha_1\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& P_0(y_0 \cos \gamma_0 - z_0 \cos \beta_0) \\
& + P_1(y_1 \cos \gamma_1 - z_1 \cos \beta_1) \\
& + P_2(y_2 \cos \gamma_2 - z_2 \cos \beta_2) \\
= & P_0(y_0 \cos \gamma_0 - z_0 \cos \beta_0) \\
& + P_1(y_1 \cos \gamma_1 - z_1 \cos \beta_1) \\
& - (P_0 \cos \gamma_0 + P_1 \cos \gamma_1)y_2 + (P_0 \cos \beta_0 + P_1 \cos \beta_1)z_2 \\
= & P_0\{(y_0 - y_2) \cos \gamma_0 - (z_0 - z_2) \cos \beta_0\} \\
& + P_1\{(y_1 - y_2) \cos \gamma_1 - (z_1 - z_2) \cos \beta_1\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& P_0(z_0 \cos \alpha_0 - x_0 \cos \gamma_0) \\
& + P_1(z_1 \cos \alpha_1 - x_1 \cos \gamma_1) \\
& + P_2(z_2 \cos \alpha_2 - x_2 \cos \gamma_2) \\
= & P_0(z_0 \cos \alpha_0 - x_0 \cos \gamma_0) \\
& + P_1(z_1 \cos \alpha_1 - x_1 \cos \gamma_1) \\
& - (P_0 \cos \alpha_0 + P_1 \cos \alpha_1)z_2 + (P_0 \cos \gamma_0 + P_1 \cos \gamma_1)x_2 \\
= & P_0\{(z_0 - z_2) \cos \alpha_0 - (x_0 - x_2) \cos \gamma_0\} \\
& + P_1\{(z_1 - z_2) \cos \alpha_1 - (x_1 - x_2) \cos \gamma_1\}.
\end{aligned}$$

Weil aber die Richtungslinien der drei Kräfte nach der Voraussetzung mit einander zusammenfallen, so ist wegen deren Gleichungen:

$$\begin{aligned}
(x_0 - x_2) \cos \beta_0 &= (y_0 - y_2) \cos \alpha_0, \\
(y_0 - y_2) \cos \gamma_0 &= (z_0 - z_2) \cos \beta_0, \\
(z_0 - z_2) \cos \alpha_0 &= (x_0 - x_2) \cos \gamma_0
\end{aligned}$$

und:

$$\begin{aligned}
(x_1 - x_2) \cos \beta_1 &= (y_1 - y_2) \cos \alpha_1, \\
(y_1 - y_2) \cos \gamma_1 &= (z_1 - z_2) \cos \beta_1, \\
(z_1 - z_2) \cos \alpha_1 &= (x_1 - x_2) \cos \gamma_1;
\end{aligned}$$

also nach dem Obigen:

$$\left. \begin{aligned}
& P_0(x_0 \cos \beta_0 - y_0 \cos \alpha_0) \\
& + P_1(x_1 \cos \beta_1 - y_1 \cos \alpha_1) \\
& + P_2(x_2 \cos \beta_2 - y_2 \cos \alpha_2)
\end{aligned} \right\} = 0,$$

$$\left. \begin{aligned} &P_0(y_0 \cos \gamma_0 - z_0 \cos \beta_0) \\ &+ P_1(y_1 \cos \gamma_1 - z_1 \cos \beta_1) \\ &+ P_2(y_2 \cos \gamma_2 - z_2 \cos \beta_2) \end{aligned} \right\} = 0,$$

$$\left. \begin{aligned} &P_0(z_0 \cos \alpha_0 - x_0 \cos \gamma_0) \\ &+ P_1(z_1 \cos \alpha_1 - x_1 \cos \gamma_1) \\ &+ P_2(z_2 \cos \alpha_2 - x_2 \cos \gamma_2) \end{aligned} \right\} = 0;$$

woraus man sieht, dass im vorliegenden Falle diese letzteren Gleichungen jederzeit von selbst erfüllt sind, wenn die Gleichungen:

$$P_0 \cos \alpha_0 + P_1 \cos \alpha_1 + P_2 \cos \alpha_2 = 0,$$

$$P_0 \cos \beta_0 + P_1 \cos \beta_1 + P_2 \cos \beta_2 = 0,$$

$$P_0 \cos \gamma_0 + P_1 \cos \gamma_1 + P_2 \cos \gamma_2 = 0$$

erfüllt sind, oder dass im vorliegenden Falle jederzeit jene Gleichungen aus diesen Gleichungen folgen.

Mit Rücksicht auf die früheren Sätze kann man nun ohne alle Einschränkung den folgenden Satz aussprechen:

Wenn die Gleichungen der Richtungslinien der drei beliebigen Kräfte  $P_0, P_1, P_2$

$$\frac{x-x_0}{\cos \alpha_0} = \frac{y-y_0}{\cos \beta_0} = \frac{z-z_0}{\cos \gamma_0},$$

$$\frac{x-x_1}{\cos \alpha_1} = \frac{y-y_1}{\cos \beta_1} = \frac{z-z_1}{\cos \gamma_1},$$

$$\frac{x-x_2}{\cos \alpha_2} = \frac{y-y_2}{\cos \beta_2} = \frac{z-z_2}{\cos \gamma_2}$$

sind, so sind:

$$\Sigma P \cos \alpha = 0, \quad \Sigma P \cos \beta = 0, \quad \Sigma P \cos \gamma = 0;$$

$$\Sigma P(x \cos \beta - y \cos \alpha) = 0,$$

$$\Sigma P(y \cos \gamma - z \cos \beta) = 0,$$

$$\Sigma P(z \cos \alpha - x \cos \gamma) = 0$$

die nothwendigen Bedingungsgleichungen für den Zustand des Gleichgewichts zwischen diesen drei Kräften.

## §. 6.

Bedingungsgleichungen für das Gleichgewicht  
zwischen beliebig vielen Kräften.

Bevor wir zur Entwicklung der gesuchten Bedingungsgleichungen selbst übergehen, wollen wir zeigen, wie sich auf einen Punkt wirkende Kräfte die Resultirende bestimmen lässt.

Die gegebenen, sämtlich auf den Punkt (*abc*) wirkend Kräfte seien:

$$P_0, P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$$

und:

1)

$$\frac{x-a}{\cos \alpha_0} = \frac{y-b}{\cos \beta_0} = \frac{z-c}{\cos \gamma_0},$$

$$\frac{x-a}{\cos \alpha_1} = \frac{y-b}{\cos \beta_1} = \frac{z-c}{\cos \gamma_1},$$

$$\frac{x-a}{\cos \alpha_2} = \frac{y-b}{\cos \beta_2} = \frac{z-c}{\cos \gamma_2},$$

u. s. w.

$$\frac{x-a}{\cos \alpha_n} = \frac{y-b}{\cos \beta_n} = \frac{z-c}{\cos \gamma_n}$$

seien die Gleichungen ihrer Richtungslinien; die Resultirende dieser Kräfte sei *R* und

$$\frac{x-a}{\cos \varphi} = \frac{y-b}{\cos \psi} = \frac{z-c}{\cos \chi}$$

seien die Gleichungen ihrer Richtungslinie.

Die Resultirende der Kräfte *P*<sub>0</sub>, *P*<sub>1</sub> sei *R*<sub>1</sub> und

$$\frac{x-a}{\cos \varphi_1} = \frac{y-b}{\cos \psi_1} = \frac{z-c}{\cos \chi_1}$$

seien die Gleichungen ihrer Richtungslinie; so ist nach §. 2. 1

$$R_1 \cos \varphi_1 = P_0 \cos \alpha_0 + P_1 \cos \alpha_1,$$

$$R_1 \cos \psi_1 = P_0 \cos \beta_0 + P_1 \cos \beta_1,$$

$$R_1 \cos \chi_1 = P_0 \cos \gamma_0 + P_1 \cos \gamma_1.$$



Die Resultirende der Kräfte  $R_1$ ,  $P_2$ , also die Resultirende Kräfte  $P_0$ ,  $P_1$ ,  $P_2$ , sei  $R_2$ , und

$$\frac{x-a}{\cos \varphi_2} = \frac{y-b}{\cos \psi_2} = \frac{z-c}{\cos \chi_2}$$

die Gleichungen ihrer Richtungslinie; so ist nach §. 2. 6):

$$R_2 \cos \varphi_2 = R_1 \cos \varphi_1 + P_2 \cos \alpha_2,$$

$$R_2 \cos \psi_2 = R_1 \cos \psi_1 + P_2 \cos \beta_2,$$

$$R_2 \cos \chi_2 = R_1 \cos \chi_1 + P_2 \cos \gamma_2;$$

nach dem Vorhergehenden:

$$R_2 \cos \varphi_2 = P_0 \cos \alpha_0 + P_1 \cos \alpha_1 + P_2 \cos \alpha_2,$$

$$R_2 \cos \psi_2 = P_0 \cos \beta_0 + P_1 \cos \beta_1 + P_2 \cos \beta_2,$$

$$R_2 \cos \chi_2 = P_0 \cos \gamma_0 + P_1 \cos \gamma_1 + P_2 \cos \gamma_2.$$

Die Resultirende der Kräfte  $R_2$ ,  $P_3$ , also die Resultirende Kräfte  $P_0$ ,  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$ , sei  $R_3$ , und

$$\frac{x-a}{\cos \varphi_3} = \frac{y-b}{\cos \psi_3} = \frac{z-c}{\cos \chi_3}$$

die Gleichungen ihrer Richtungslinie; so ist nach §. 2. 6):

$$R_3 \cos \varphi_3 = R_2 \cos \varphi_2 + P_3 \cos \alpha_3,$$

$$R_3 \cos \psi_3 = R_2 \cos \psi_2 + P_3 \cos \beta_3,$$

$$R_3 \cos \chi_3 = R_2 \cos \chi_2 + P_3 \cos \gamma_3;$$

so nach dem Vorhergehenden:

$$R_3 \cos \varphi_3 = P_0 \cos \alpha_0 + P_1 \cos \alpha_1 + P_2 \cos \alpha_2 + P_3 \cos \alpha_3,$$

$$R_3 \cos \psi_3 = P_0 \cos \beta_0 + P_1 \cos \beta_1 + P_2 \cos \beta_2 + P_3 \cos \beta_3,$$

$$R_3 \cos \chi_3 = P_0 \cos \gamma_0 + P_1 \cos \gamma_1 + P_2 \cos \gamma_2 + P_3 \cos \gamma_3.$$

Wie man auf diese Art weiter gehen kann, unterliegt keinem Zweifel, und es ist also nach dem sich hier kund gebenden Gesetze und in analoger Bezeichnung für eine beliebige Anzahl von Kräften:

$$R_n \cos \varphi_n = P_0 \cos \alpha_0 + P_1 \cos \alpha_1 + P_2 \cos \alpha_2 + \dots + P_n \cos \alpha_n,$$

$$R_n \cos \psi_n = P_0 \cos \beta_0 + P_1 \cos \beta_1 + P_2 \cos \beta_2 + \dots + P_n \cos \beta_n,$$

$$R_n \cos \chi_n = P_0 \cos \gamma_0 + P_1 \cos \gamma_1 + P_2 \cos \gamma_2 + \dots + P_n \cos \gamma_n;$$

oder, wenn man jetzt für  $R_n$ ,  $\varphi_n$ ,  $\psi_n$ ,  $\chi_n$  beziehungsweise  $R$ ,  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\chi$  schreibt:

2)

$$R \cos \varphi = P_0 \cos \alpha_0 + P_1 \cos \alpha_1 + P_2 \cos \alpha_2 + \dots + P_n \cos \alpha_n,$$

$$R \cos \psi = P_0 \cos \beta_0 + P_1 \cos \beta_1 + P_2 \cos \beta_2 + \dots + P_n \cos \beta_n,$$

$$R \cos \chi = P_0 \cos \gamma_0 + P_1 \cos \gamma_1 + P_2 \cos \gamma_2 + \dots + P_n \cos \gamma_n;$$

oder in abkürzender Schreibweise:

3)

$$R \cos \varphi = \Sigma P \cos \alpha, \quad R \cos \psi = \Sigma P \cos \beta, \quad R \cos \chi = \Sigma P \cos \gamma;$$

aus welchen Gleichungen  $R$ ,  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\chi$  bestimmt werden müssen wobei wir uns jetzt nicht aufhalten, weil diese Bestimmung für unseren nächsten Zweck nicht erforderlich ist.

Wenn man in den durch die Gleichungen 1) charakterisirten Richtungslinien der Kräfte

$$P_0, P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$$

beliebige Punkte

$$(x_0 y_0 z_0), (x_1 y_1 z_1), (x_2 y_2 z_2), \dots, (x_n y_n z_n)$$

annimmt, deren als positiv betrachtete Entfernungen von der Punkte  $(abc)$  beziehungsweise durch

$$r_0, r_1, r_2, r_3, \dots, r_n$$

bezeichnet, und die Kräfte

$$P_0, P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$$

als positiv oder negativ betrachtet, jenachdem sie von dem Punkt  $(abc)$  nach den Punkten

$$(x_0 y_0 z_0), (x_1 y_1 z_1), (x_2 y_2 z_2), \dots, (x_n y_n z_n)$$

hin, oder nach entgegengesetzten Richtungen hin gerichtet sind so ist nach §. 1. 5):

$$\cos \alpha_0 = \frac{x_0 - a}{r_0}, \quad \cos \beta_0 = \frac{y_0 - b}{r_0}, \quad \cos \gamma_0 = \frac{z_0 - c}{r_0};$$

$$\cos \alpha_1 = \frac{x_1 - a}{r_1}, \quad \cos \beta_1 = \frac{y_1 - b}{r_1}, \quad \cos \gamma_1 = \frac{z_1 - c}{r_1};$$

$$\cos \alpha_2 = \frac{x_2 - a}{r_2}, \quad \cos \beta_2 = \frac{y_2 - b}{r_2}, \quad \cos \gamma_2 = \frac{z_2 - c}{r_2};$$

u. s. w.

$$\cos \alpha_n = \frac{x_n - a}{r_n}, \quad \cos \beta_n = \frac{y_n - b}{r_n}, \quad \cos \gamma_n = \frac{z_n - c}{r_n};$$

o nach 2):

4)

$$\cos \varphi = P_0 \frac{x_0 - a}{r_0} + P_1 \frac{x_1 - a}{r_1} + P_2 \frac{x_2 - a}{r_2} + \dots + P_n \frac{x_n - a}{r_n},$$

$$\cos \psi = P_0 \frac{y_0 - b}{r_0} + P_1 \frac{y_1 - b}{r_1} + P_2 \frac{y_2 - b}{r_2} + \dots + P_n \frac{y_n - b}{r_n},$$

$$\cos \chi = P_0 \frac{z_0 - c}{r_0} + P_1 \frac{z_1 - c}{r_1} + P_2 \frac{z_2 - c}{r_2} + \dots + P_n \frac{z_n - c}{r_n}.$$

Wir wollen nun annehmen, dass

$$P_0, P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$$

beliebig viele Kräfte und die Gleichungen ihrer Richtungslinien:

5)

$$\frac{x - x_0}{\cos \alpha_0} = \frac{y - y_0}{\cos \beta_0} = \frac{z - z_0}{\cos \gamma_0},$$

$$\frac{x - x_1}{\cos \alpha_1} = \frac{y - y_1}{\cos \beta_1} = \frac{z - z_1}{\cos \gamma_1},$$

$$\frac{x - x_2}{\cos \alpha_2} = \frac{y - y_2}{\cos \beta_2} = \frac{z - z_2}{\cos \gamma_2},$$

u. s. w.

$$\frac{x - x_n}{\cos \alpha_n} = \frac{y - y_n}{\cos \beta_n} = \frac{z - z_n}{\cos \gamma_n}$$

sein. Um die nothwendigen Bedingungsgleichungen für das Gleichgewicht dieser Kräfte zu finden, nehmen wir drei beliebige Punkte

$$(a'b'c'), (a''b''c''), (a'''b'''c''')$$

an, und ziehen von jedem dieser Punkte durch alle Punkte

$$(x_0 y_0 z_0), (x_1 y_1 z_1), (x_2 y_2 z_2), \dots, (x_n y_n z_n)$$

Gerade. Nach diesen Geraden als Richtungslinien zerlegen wir jede der Kräfte

$$P_0, P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$$

in drei Kräfte, welche wir beziehungsweise durch

$$P_0', P_0'', P_0'''; P_1', P_1'', P_1'''; P_2', P_2'', P_2'''; \dots; P_n', P_n'', P_n'''$$

bezeichnen, und als positiv oder negativ betrachten, je nachdem sie nach den von den Punkten

$$(a'b'c'), (a''b''c''), (a'''b'''c''')$$

nach den Punkten

$$(x_0 y_0 z_0), (x_1 y_1 z_1), (x_2 y_2 z_2), \dots, (x_n y_n z_n)$$

hin genommenen Richtungen, oder nach den entgegengesetzten Richtungen hin gerichtet sind. Bezeichnen wir dann die als positiv betrachteten Entfernungen der Punkte

$$(x_0 y_0 z_0), (x_1 y_1 z_1), (x_2 y_2 z_2), \dots, (x_n y_n z_n)$$

von den Punkten

$$(a'b'c'), (a''b''c''), (a'''b'''c''')$$

beziehungsweise durch

$$r_0', r_0'', r_0'''; r_1', r_1'', r_1'''; r_2', r_2'', r_2'''; \dots; r_n', r_n'', r_n''';$$

so ist nach §.3. 10):

$$P_0 \cos \alpha_0 = P_0' \frac{x_0 - a'}{r_0'} + P_0'' \frac{x_0 - a''}{r_0''} + P_0''' \frac{x_0 - a'''}{r_0'''} ,$$

$$P_0 \cos \beta_0 = P_0' \frac{y_0 - b'}{r_0'} + P_0'' \frac{y_0 - b''}{r_0''} + P_0''' \frac{y_0 - b'''}{r_0'''} ,$$

$$P_0 \cos \gamma_0 = P_0' \frac{z_0 - c'}{r_0'} + P_0'' \frac{z_0 - c''}{r_0''} + P_0''' \frac{z_0 - c'''}{r_0'''} ;$$

$$P_1 \cos \alpha_1 = P_1' \frac{x_1 - a'}{r_1'} + P_1'' \frac{x_1 - a''}{r_1''} + P_1''' \frac{x_1 - a'''}{r_1'''} ,$$

$$P_1 \cos \beta_1 = P_1' \frac{y_1 - b'}{r_1'} + P_1'' \frac{y_1 - b''}{r_1''} + P_1''' \frac{y_1 - b'''}{r_1'''} ,$$

$$P_1 \cos \gamma_1 = P_1' \frac{z_1 - c'}{r_1'} + P_1'' \frac{z_1 - c''}{r_1''} + P_1''' \frac{z_1 - c'''}{r_1'''} ;$$

$$P_2 \cos \alpha_2 = P_2' \frac{x_2 - a'}{r_2'} + P_2'' \frac{x_2 - a''}{r_2''} + P_2''' \frac{x_2 - a'''}{r_2'''} ,$$

$$P_2 \cos \beta_2 = P_2' \frac{y_2 - b'}{r_2'} + P_2'' \frac{y_2 - b''}{r_2''} + P_2''' \frac{y_2 - b'''}{r_2'''} ,$$

$$P_2 \cos \gamma_2 = P_2' \frac{z_2 - c'}{r_2'} + P_2'' \frac{z_2 - c''}{r_2''} + P_2''' \frac{z_2 - c'''}{r_2'''} ;$$

u. s. w.

$$P_n \cos \alpha_n = P_n' \frac{x_n - a'}{r_n'} + P_n'' \frac{x_n - a''}{r_n''} + P_n''' \frac{x_n - a'''}{r_n'''} ,$$

$$P_n \cos \beta_n = P_n' \frac{y_n - b'}{r_n'} + P_n'' \frac{y_n - b''}{r_n''} + P_n''' \frac{y_n - b'''}{r_n'''} ,$$

$$P_n \cos \gamma_n = P_n' \frac{z_n - c'}{r_n'} + P_n'' \frac{z_n - c''}{r_n''} + P_n''' \frac{z_n - c'''}{r_n'''} .$$

Bezeichnen wir nun die Resultirenden aller in den Punkten

$$(a'b'c'), (a''b''c''), (a'''b'''c''')$$

stehenden Kräfte durch

$$\Pi', \Pi'', \Pi'''$$

und die Gleichungen der Richtungslinien dieser Resultirenden

schreiben:

$$\frac{x - a'}{\cos \varphi'} = \frac{y - b'}{\cos \psi'} = \frac{z - c'}{\cos \chi'} ,$$

$$\frac{x - a''}{\cos \varphi''} = \frac{y - b''}{\cos \psi''} = \frac{z - c''}{\cos \chi''} ,$$

$$\frac{x - a'''}{\cos \varphi'''} = \frac{y - b'''}{\cos \psi'''} = \frac{z - c'''}{\cos \chi'''} ;$$

ist nach 4):

$$\cos \varphi' = P_0' \frac{x_0 - a'}{r_0'} + P_1' \frac{x_1 - a'}{r_1'} + P_2' \frac{x_2 - a'}{r_2'} + \dots + P_n' \frac{x_n - a'}{r_n'} ,$$

$$\cos \psi' = P_0' \frac{y_0 - b'}{r_0'} + P_1' \frac{y_1 - b'}{r_1'} + P_2' \frac{y_2 - b'}{r_2'} + \dots + P_n' \frac{y_n - b'}{r_n'} ,$$

$$\cos \chi' = P_0' \frac{z_0 - c'}{r_0'} + P_1' \frac{z_1 - c'}{r_1'} + P_2' \frac{z_2 - c'}{r_2'} + \dots + P_n' \frac{z_n - c'}{r_n'} ;$$

$$\Pi'' \cos \varphi'' = P_0'' \frac{x_0 - a''}{r_0''} + P_1'' \frac{x_1 - a''}{r_1''} + P_2'' \frac{x_2 - a''}{r_2''} + \dots + P_n'' \frac{x_n - a''}{r_n''}$$

$$\Pi'' \cos \psi'' = P_0'' \frac{y_0 - b''}{r_0''} + P_1'' \frac{y_1 - b''}{r_1''} + P_2'' \frac{y_2 - b''}{r_2''} + \dots + P_n'' \frac{y_n - b''}{r_n''}$$

$$\Pi'' \cos \chi'' = P_0'' \frac{z_0 - c''}{r_0''} + P_1'' \frac{z_1 - c''}{r_1''} + P_2'' \frac{z_2 - c''}{r_2''} + \dots + P_n'' \frac{z_n - c''}{r_n''}$$

$$\begin{aligned} \Pi''' \cos \varphi''' = P_0''' \frac{x_0 - a'''}{r_0'''} + P_1''' \frac{x_1 - a'''}{r_1'''} + P_2''' \frac{x_2 - a'''}{r_2'''} + \dots \\ \dots + P_n''' \frac{x_n - a'''}{r_n'''} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pi''' \cos \psi''' = P_0''' \frac{y_0 - b'''}{r_0'''} + P_1''' \frac{y_1 - b'''}{r_1'''} + P_2''' \frac{y_2 - b'''}{r_2'''} + \dots \\ \dots + P_n''' \frac{y_n - b'''}{r_n'''} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pi''' \cos \chi''' = P_0''' \frac{z_0 - c'''}{r_0'''} + P_1''' \frac{z_1 - c'''}{r_1'''} + P_2''' \frac{z_2 - c'''}{r_2'''} + \dots \\ \dots + P_n''' \frac{z_n - c'''}{r_n'''} \end{aligned}$$

Stellen wir jetzt die nothwendigen Bedingungsgleichungen für Gleichgewicht der drei Kräfte  $\Pi'$ ,  $\Pi''$ ,  $\Pi'''$  auf, so erhalten offenbar unmittelbar die gesuchten nothwendigen Bedingungsgleichungen für das Gleichgewicht der Kräfte

$$P_0, P_1, P_2, P_3, \dots, P_n.$$

Nach §. 5. sind aber die in Rede stehenden Bedingungsgleichungen

$$\Pi' \cos \varphi' + \Pi'' \cos \varphi'' + \Pi''' \cos \varphi''' = 0,$$

$$\Pi' \cos \psi' + \Pi'' \cos \psi'' + \Pi''' \cos \psi''' = 0,$$

$$\Pi' \cos \chi' + \Pi'' \cos \chi'' + \Pi''' \cos \chi''' = 0;$$

$$\left. \begin{aligned} &\Pi' (a' \cos \psi' - b' \cos \varphi') \\ &+ \Pi'' (a'' \cos \psi'' - b'' \cos \varphi'') \\ &+ \Pi''' (a''' \cos \psi''' - b''' \cos \varphi''') \end{aligned} \right\} = 0,$$

$$\left. \begin{aligned} &\Pi' (b' \cos \chi' - c' \cos \psi') \\ &+ \Pi'' (b'' \cos \chi'' - c'' \cos \psi'') \\ &+ \Pi''' (b''' \cos \chi''' - c''' \cos \psi''') \end{aligned} \right\} = 0,$$

$$\left. \begin{aligned} & \Pi' (c' \cos \varphi' - a' \cos \chi') \\ & + \Pi'' (c'' \cos \varphi'' - a'' \cos \chi'') \\ & + \Pi''' (c''' \cos \varphi''' - a''' \cos \chi''') \end{aligned} \right\} = 0;$$

d diese Gleichungen müssen nun mittelst des Vorhergehenden weiter entwickelt werden.

Zunächst erhält man mittelst der oben gefundenen Formeln an der Stelle:

$$\begin{aligned} & \Pi' \cos \varphi' + \Pi'' \cos \varphi'' + \Pi''' \cos \varphi''' \\ & = P_0 \cos \alpha_0 + P_1 \cos \alpha_1 + P_2 \cos \alpha_2 + \dots + P_n \cos \alpha_n, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \Pi' \cos \psi' + \Pi'' \cos \psi'' + \Pi''' \cos \psi''' \\ & = P_0 \cos \beta_0 + P_1 \cos \beta_1 + P_2 \cos \beta_2 + \dots + P_n \cos \beta_n, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \Pi' \cos \chi' + \Pi'' \cos \chi'' + \Pi''' \cos \chi''' \\ & = P_0 \cos \gamma_0 + P_1 \cos \gamma_1 + P_2 \cos \gamma_2 + \dots + P_n \cos \gamma_n. \end{aligned}$$

Ferner ist nach dem Obigen:

$$\begin{aligned} & \Pi' (a' \cos \psi' - b' \cos \varphi') \\ & + \Pi'' (a'' \cos \psi'' - b'' \cos \varphi'') \\ & + \Pi''' (a''' \cos \psi''' - b''' \cos \varphi''') \\ & = a' \left( P_0' \frac{y_0 - b'}{r_0'} + P_1' \frac{y_1 - b'}{r_1'} + P_2' \frac{y_2 - b'}{r_2'} + \dots + P_n' \frac{y_n - b'}{r_n'} \right) \\ & - b' \left( P_0' \frac{x_0 - a'}{r_0'} + P_1' \frac{x_1 - a'}{r_1'} + P_2' \frac{x_2 - a'}{r_2'} + \dots + P_n' \frac{x_n - a'}{r_n'} \right) \\ & + a'' \left( P_0'' \frac{y_0 - b''}{r_0''} + P_1'' \frac{y_1 - b''}{r_1''} + P_2'' \frac{y_2 - b''}{r_2''} + \dots + P_n'' \frac{y_n - b''}{r_n''} \right) \\ & - b'' \left( P_0'' \frac{x_0 - a''}{r_0''} + P_1'' \frac{x_1 - a''}{r_1''} + P_2'' \frac{x_2 - a''}{r_2''} + \dots + P_n'' \frac{x_n - a''}{r_n''} \right) \\ & + a''' \left( P_0''' \frac{y_0 - b'''}{r_0'''} + P_1''' \frac{y_1 - b'''}{r_1'''} + P_2''' \frac{y_2 - b'''}{r_2'''} + \dots + P_n''' \frac{y_n - b'''}{r_n'''} \right) \\ & - b''' \left( P_0''' \frac{x_0 - a'''}{r_0'''} + P_1''' \frac{x_1 - a'''}{r_1'''} + P_2''' \frac{x_2 - a'''}{r_2'''} + \dots + P_n''' \frac{x_n - a'''}{r_n'''} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= P_0' \left( a' \frac{y_0 - b'}{r_0'} - b' \frac{x_0 - a'}{r_0'} \right) \\
&+ P_1' \left( a' \frac{y_1 - b'}{r_1'} - b' \frac{x_1 - a'}{r_1'} \right) \\
&+ P_2' \left( a' \frac{y_2 - b'}{r_2'} - b' \frac{x_2 - a'}{r_2'} \right)
\end{aligned}$$

u. s. w.

$$\begin{aligned}
&+ P_n' \left( a' \frac{y_n - b'}{r_n'} - b' \frac{x_n - a'}{r_n'} \right) \\
&+ P_0'' \left( a'' \frac{y_0 - b''}{r_0''} - b'' \frac{x_0 - a''}{r_0''} \right) \\
&+ P_1'' \left( a'' \frac{y_1 - b''}{r_1''} - b'' \frac{x_1 - a''}{r_1''} \right) \\
&+ P_2'' \left( a'' \frac{y_2 - b''}{r_2''} - b'' \frac{x_2 - a''}{r_2''} \right)
\end{aligned}$$

u. s. w.

$$\begin{aligned}
&+ P_n'' \left( a'' \frac{y_n - b''}{r_n''} - b'' \frac{x_n - a''}{r_n''} \right) \\
&+ P_0''' \left( a''' \frac{y_0 - b'''}{r_0'''} - b''' \frac{x_0 - a'''}{r_0'''} \right) \\
&+ P_1''' \left( a''' \frac{y_1 - b'''}{r_1'''} - b''' \frac{x_1 - a'''}{r_1'''} \right) \\
&+ P_2''' \left( a''' \frac{y_2 - b'''}{r_2'''} - b''' \frac{x_2 - a'''}{r_2'''} \right)
\end{aligned}$$

u. s. w.

$$\begin{aligned}
&+ P_n''' \left( a''' \frac{y_n - b'''}{r_n'''} - b''' \frac{x_n - a'''}{r_n'''} \right) \\
&= P_0' \left( x_0 \frac{y_0 - b'}{r_0'} - y_0 \frac{x_0 - a'}{r_0'} \right) \\
&+ P_0'' \left( x_0 \frac{y_0 - b''}{r_0''} - y_0 \frac{x_0 - a''}{r_0''} \right) \\
&+ P_0''' \left( x_0 \frac{y_0 - b'''}{r_0'''} - y_0 \frac{x_0 - a'''}{r_0'''} \right)
\end{aligned}$$



$$+ P_1' \left( x_1 \frac{y_1 - b'}{r_1'} - y_1 \frac{x_1 - a'}{r_1'} \right)$$

$$+ P_1'' \left( x_1 \frac{y_1 - b''}{r_1''} - y_1 \frac{x_1 - a''}{r_1''} \right)$$

$$+ P_1''' \left( x_1 \frac{y_1 - b'''}{r_1'''} - y_1 \frac{x_1 - a'''}{r_1'''} \right)$$

$$+ P_2' \left( x_2 \frac{y_2 - b'}{r_2'} - y_2 \frac{x_2 - a'}{r_2'} \right)$$

$$+ P_2'' \left( x_2 \frac{y_2 - b''}{r_2''} - y_2 \frac{x_2 - a''}{r_2''} \right)$$

$$+ P_2''' \left( x_2 \frac{y_2 - b'''}{r_2'''} - y_2 \frac{x_2 - a'''}{r_2'''} \right)$$

u. s. w.

$$+ P_n' \left( x_n \frac{y_n - b'}{r_n'} - y_n \frac{x_n - a'}{r_n'} \right)$$

$$+ P_n'' \left( x_n \frac{y_n - b''}{r_n''} - y_n \frac{x_n - a''}{r_n''} \right)$$

$$+ P_n''' \left( x_n \frac{y_n - b'''}{r_n'''} - y_n \frac{x_n - a'''}{r_n'''} \right)$$

$$= x_0 \left( P_0' \frac{y_0 - b'}{r_0'} + P_0'' \frac{y_0 - b''}{r_0''} + P_0''' \frac{y_0 - b'''}{r_0'''} \right) \\ - y_0 \left( P_0' \frac{x_0 - a'}{r_0'} + P_0'' \frac{x_0 - a''}{r_0''} + P_0''' \frac{x_0 - a'''}{r_0'''} \right) \\ + x_1 \left( P_1' \frac{y_1 - b'}{r_1'} + P_1'' \frac{y_1 - b''}{r_1''} + P_1''' \frac{y_1 - b'''}{r_1'''} \right) \\ - y_1 \left( P_1' \frac{x_1 - a'}{r_1'} + P_1'' \frac{x_1 - a''}{r_1''} + P_1''' \frac{x_1 - a'''}{r_1'''} \right) \\ + x_2 \left( P_2' \frac{y_2 - b'}{r_2'} + P_2'' \frac{y_2 - b''}{r_2''} + P_2''' \frac{y_2 - b'''}{r_2'''} \right) \\ - y_2 \left( P_2' \frac{x_2 - a'}{r_2'} + P_2'' \frac{x_2 - a''}{r_2''} + P_2''' \frac{x_2 - a'''}{r_2'''} \right)$$

u. s. w.

$$\begin{aligned}
& + x_n \left( P_n' \frac{y_n - b'}{r_n'} + P_n'' \frac{y_n - b''}{r_n''} + P_n''' \frac{y_n - b'''}{r_n'''} \right) \\
& - y_n \left( P_n' \frac{x_n - a'}{r_n'} + P_n'' \frac{x_n - a''}{r_n''} + P_n''' \frac{x_n - a'''}{r_n'''} \right) \\
& = P_0 (x_0 \cos \beta_0 - y_0 \cos \alpha_0) \\
& \quad + P_1 (x_1 \cos \beta_1 - y_1 \cos \alpha_1) \\
& \quad + P_2 (x_2 \cos \beta_2 - y_2 \cos \alpha_2) \\
& \quad \text{u. s. w.} \\
& \quad + P_n (x_n \cos \beta_n - y_n \cos \alpha_n).
\end{aligned}$$

Weil sich nun die übrigen obigen Bedingungsgleichungen Gleichgewichts der Kräfte  $\Pi'$ ,  $\Pi''$ ,  $\Pi'''$  ganz eben so beha-  
lassen, so erhalten wir als Bedingungsgleichungen des Gleich-  
gewichts der Kräfte

$$P_0, P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$$

die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}
P_0 \cos \alpha_0 + P_1 \cos \alpha_1 + P_2 \cos \alpha_2 + \dots + P_n \cos \alpha_n &= 0, \\
P_0 \cos \beta_0 + P_1 \cos \beta_1 + P_2 \cos \beta_2 + \dots + P_n \cos \beta_n &= 0, \\
P_0 \cos \gamma_0 + P_1 \cos \gamma_1 + P_2 \cos \gamma_2 + \dots + P_n \cos \gamma_n &= 0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& P_0 (x_0 \cos \beta_0 - y_0 \cos \alpha_0) \\
& + P_1 (x_1 \cos \beta_1 - y_1 \cos \alpha_1) \\
& + P_2 (x_2 \cos \beta_2 - y_2 \cos \alpha_2) \\
& \quad \text{u. s. w.} \\
& + P_n (x_n \cos \beta_n - y_n \cos \alpha_n)
\end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} & P_0 (x_0 \cos \beta_0 - y_0 \cos \alpha_0) \\ & + P_1 (x_1 \cos \beta_1 - y_1 \cos \alpha_1) \\ & + P_2 (x_2 \cos \beta_2 - y_2 \cos \alpha_2) \\ & \quad \text{u. s. w.} \\ & + P_n (x_n \cos \beta_n - y_n \cos \alpha_n) \end{aligned}} \right\} = 0,$$

$$\begin{aligned}
& P_0 (y_0 \cos \gamma_0 - x_0 \cos \beta_0) \\
& + P_1 (y_1 \cos \gamma_1 - x_1 \cos \beta_1) \\
& + P_2 (y_2 \cos \gamma_2 - x_2 \cos \beta_2) \\
& \quad \text{u. s. w.} \\
& + P_n (y_n \cos \gamma_n - x_n \cos \beta_n)
\end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} & P_0 (y_0 \cos \gamma_0 - x_0 \cos \beta_0) \\ & + P_1 (y_1 \cos \gamma_1 - x_1 \cos \beta_1) \\ & + P_2 (y_2 \cos \gamma_2 - x_2 \cos \beta_2) \\ & \quad \text{u. s. w.} \\ & + P_n (y_n \cos \gamma_n - x_n \cos \beta_n) \end{aligned}} \right\} = 0,$$

$$\begin{aligned}
 &P_0(z_0 \cos \alpha_0 - x_0 \cos \gamma_0) \\
 &+ P_1(z_1 \cos \alpha_1 - x_1 \cos \gamma_1) \\
 &+ P_2(z_2 \cos \alpha_2 - x_2 \cos \gamma_2) \\
 &\quad \text{u. s. w.} \\
 &+ P_n(z_n \cos \alpha_n - x_n \cos \gamma_n)
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\begin{aligned} &P_0(z_0 \cos \alpha_0 - x_0 \cos \gamma_0) \\ &+ P_1(z_1 \cos \alpha_1 - x_1 \cos \gamma_1) \\ &+ P_2(z_2 \cos \alpha_2 - x_2 \cos \gamma_2) \\ &\quad \text{u. s. w.} \\ &+ P_n(z_n \cos \alpha_n - x_n \cos \gamma_n) \end{aligned}} \right\} = 0;$$

aben daher jetzt den folgenden Hauptsatz der ganzen Statik:  
ür beliebige Kräfte

$$P_0, P_1, P_2, P_3, \dots, P_n,$$

1 Richtungslinien durch die Gleichungen:

$$\frac{x-x_0}{\cos \alpha_0} = \frac{y-y_0}{\cos \beta_0} = \frac{z-z_0}{\cos \gamma_0},$$

$$\frac{x-x_1}{\cos \alpha_1} = \frac{y-y_1}{\cos \beta_1} = \frac{z-z_1}{\cos \gamma_1},$$

$$\frac{x-x_2}{\cos \alpha_2} = \frac{y-y_2}{\cos \beta_2} = \frac{z-z_2}{\cos \gamma_2},$$

u. s. w.

$$\frac{x-x_n}{\cos \alpha_n} = \frac{y-y_n}{\cos \beta_n} = \frac{z-z_n}{\cos \gamma_n}$$

akterisirt sind, sind die nothwendigen Bedingungs-  
chungen des Gleichgewichts:

$$\Sigma P \cos \alpha = 0, \quad \Sigma P \cos \beta = 0, \quad \Sigma P \cos \gamma = 0;$$

$$\Sigma P(x \cos \beta - y \cos \alpha) = 0,$$

$$\Sigma P(y \cos \gamma - z \cos \beta) = 0,$$

$$\Sigma P(z \cos \alpha - x \cos \gamma) = 0.$$

### §. 7.

Resultirende beliebig vieler Kräfte.

Die gegebenen Kräfte seien wieder:

$$P_0, P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$$

1)

$$\frac{x-x_0}{\cos \alpha_0} = \frac{y-y_0}{\cos \beta_0} = \frac{z-z_0}{\cos \gamma_0},$$

$$\frac{x-x_1}{\cos \alpha_1} = \frac{y-y_1}{\cos \beta_1} = \frac{z-z_1}{\cos \gamma_1},$$

$$\frac{x-x_2}{\cos \alpha_2} = \frac{y-y_2}{\cos \beta_2} = \frac{z-z_2}{\cos \gamma_2},$$

u. s. w.

$$\frac{x-x_n}{\cos \alpha_n} = \frac{y-y_n}{\cos \beta_n} = \frac{z-z_n}{\cos \gamma_n}$$

seien die Gleichungen ihrer Richtungslinien.

Die Resultirende dieser Kräfte, insofern es eine solche giebt, was durch die folgenden Untersuchungen selbst erst weiter ermittelt und entschieden werden soll, sei  $R$ , und

$$2) \dots\dots\dots \frac{x-X}{\cos \varphi} = \frac{y-Y}{\cos \psi} = \frac{z-Z}{\cos \chi}$$

seien die Gleichungen der Richtungslinie dieser Resultirenden.

Zuerst gehen wir von der Voraussetzung aus, dass es für die gegebenen Kräfte eine Resultirende  $R$  wirklich giebt. Dann giebt es für die gegebenen Kräfte auch eine Aequipollente, welche der Resultirenden gleich und direct entgegengesetzt, und daher  $-R$  ist, insofern wir die Gleichungen 2) auch als Gleichungen der Richtungslinie der Aequipollenten betrachten. Da nun die Aequipollente mit den gegebenen Kräften im Gleichgewichte ist, so dass also zwischen den Kräften

$$P_0, P_1, P_2, P_3, \dots P_n, -R$$

deren Richtungslinien durch die Gleichungen 1) und 2) charakterisirt sind, Gleichgewicht Statt findet, so haben wir nach §. 6. die folgenden Gleichungen:

$$\Sigma P \cos \alpha - R \cos \varphi = 0,$$

$$\Sigma P \cos \beta - R \cos \psi = 0,$$

$$\Sigma P \cos \gamma - R \cos \chi = 0;$$

$$\Sigma P(x \cos \beta - y \cos \alpha) - R(X \cos \psi - Y \cos \varphi) = 0,$$

$$\Sigma P(y \cos \gamma - z \cos \beta) - R(Y \cos \chi - Z \cos \psi) = 0,$$

$$\Sigma P(z \cos \alpha - x \cos \gamma) - R(Z \cos \varphi - X \cos \chi) = 0;$$

3)

$$R \cos \varphi = \Sigma P \cos \alpha, \quad R \cos \psi = \Sigma P \cos \beta, \quad R \cos \chi = \Sigma P \cos \gamma;$$

$$R(X \cos \psi - Y \cos \varphi) = \Sigma P(x \cos \beta - y \cos \alpha),$$

$$R(Y \cos \chi - Z \cos \psi) = \Sigma P(y \cos \gamma - z \cos \beta),$$

$$R(Z \cos \varphi - X \cos \chi) = \Sigma P(z \cos \alpha - x \cos \gamma);$$

wenn wir der Kürze wegen im Folgenden immer:

4)

$$L = \Sigma P \cos \alpha, \quad M = \Sigma P \cos \beta, \quad N = \Sigma P \cos \gamma;$$

$$N_1 = \Sigma P(x \cos \beta - y \cos \alpha),$$

$$L_1 = \Sigma P(y \cos \gamma - z \cos \beta),$$

$$M_1 = \Sigma P(z \cos \alpha - x \cos \gamma)$$

so:

5)

$$R \cos \varphi = L, \quad R \cos \psi = M, \quad R \cos \chi = N;$$

$$R(X \cos \psi - Y \cos \varphi) = N_1,$$

$$R(Y \cos \chi - Z \cos \psi) = L_1,$$

$$R(Z \cos \varphi - X \cos \chi) = M_1;$$

6)

$$R \cos \varphi = L, \quad R \cos \psi = M, \quad R \cos \chi = N;$$

$$N_1 - MX + LY = 0,$$

$$L_1 - NY + MZ = 0,$$

$$M_1 - LZ + NX = 0.$$

Wenn wir die drei letzten Gleichungen nach der Reihe mit  $L$ ,  $M$  multipliciren und dann zu einander addiren, so erhalten die Gleichung:

$$LL_1 + MM_1 + NN_1 = 0,$$

che Elemente, die sich auf die Resultirende beziehen, gar  
t mehr enthält; und wir haben daher den folgenden Satz:

Wenn es für die Kräfte

$$P_0, P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$$

eine Resultirende giebt, so ist immer:

$$LL_1 + MM_1 + NN_1 = 0.$$

Aus diesem Satze ergibt sich aber ferner unmittelbar der folgende Satz:

Wenn die Gleichung:

$$LL_1 + MM_1 + NN_1 = 0$$

nicht erfüllt ist, so giebt es für die Kräfte

$$P_0, P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$$

keine Resultirende.

Wenn wir aus den drei ersten der Gleichungen 6), natürlich in Verbindung mit der Gleichung

$$\cos \varphi^2 + \cos \psi^2 + \cos \chi^2 = 1,$$

die Grössen  $R$  und  $\varphi, \psi, \chi$  bestimmen; so erhalten wir die Ausdrücke:

$$R = \pm \sqrt{L^2 + M^2 + N^2},$$

und mit Beziehung der oberen und unteren Zeichen auf einander:

$$\cos \varphi = \frac{L}{R} = \pm \frac{L}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}},$$

$$\cos \psi = \frac{M}{R} = \pm \frac{M}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}},$$

$$\cos \chi = \frac{N}{R} = \pm \frac{N}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}};$$

woraus sich ergibt, dass man für  $\cos \varphi, \cos \psi, \cos \chi$  nur endliche bestimmte Werthe erhält, wenn die Grösse

$$L^2 + M^2 + N^2$$

nicht verschwindet, wenn also nicht zugleich

$$L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0$$

ist, oder wenn wenigstens eine der drei Grössen  $L, M, N$  nicht verschwindet.

Aus allem Bisherigen erhellet nun, dass, wenn wir uns überhaupt die Aufgabe stellen: die Resultirende der Kräfte

$$P_0, P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$$

bestimmen, wir jedenfalls von den beiden Voraussetzungen ausgehen müssen, dass die Gleichung:

$$LL_1 + MM_1 + NN_1 = 0$$

erfüllt ist, und dass die drei Grössen  $L$ ,  $M$ ,  $N$  nicht sämmtlich verschwinden.

Um nun unter diesen nothwendigen Voraussetzungen die Gleichungen 6) aufzulösen, bestimmen wir zuerst aus den drei ersten dieser Gleichungen die Grössen  $R$  und  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\chi$ ; und erhalten für dieselben wie vorher die folgenden Ausdrücke:

8)

$$R = \pm \sqrt{L^2 + M^2 + N^2};$$

$$\cos \varphi = \frac{L}{R} = \pm \frac{L}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}},$$

$$\cos \psi = \frac{M}{R} = \pm \frac{M}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}},$$

$$\cos \chi = \frac{N}{R} = \pm \frac{N}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}};$$

denen die oberen und unteren Zeichen sich auf einander beziehen, und welche für die gesuchten Grössen unter den gemachten Voraussetzungen jedenfalls endliche bestimmte Werthe liefern. Gleich erhellet, dass  $R$  nicht verschwindet.

Was die doppelten Vorzeichen betrifft, so ist darüber zu bemerken, dass es ganz gleichgültig ist, welche Vorzeichen man nimmt. Nimmt man nämlich die oberen Zeichen, und setzt also, indem man  $R$  positiv nimmt:

$$R = \sqrt{L^2 + M^2 + N^2};$$

so heisst dies, dass die Richtung der Richtungslinie der Kraft  $R$ , welche den durch die Formeln:

$$\cos \varphi = \frac{L}{R} = \frac{L}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}},$$

$$\cos \psi = \frac{M}{R} = \frac{M}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}},$$

$$\cos \chi = \frac{N}{R} = \frac{N}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}}$$

bestimmten Winkeln  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\chi$  entspricht, die Richtung der Kraft  $R$  ist; nimmt man dagegen die unteren Zeichen, und setzt also, indem man  $R$  negativ nimmt:

$$R = -\sqrt{L^2 + M^2 + N^2};$$

so heisst dies, dass die der Richtung der Richtungslinie der Kraft  $R$ , welche den durch die Formeln:

$$\cos \varphi = \frac{L}{R} = -\frac{L}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}},$$

$$\cos \psi = \frac{M}{R} = -\frac{M}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}},$$

$$\cos \chi = \frac{N}{R} = -\frac{N}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}}$$

bestimmten Winkeln  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\chi$  entspricht, entgegengesetzte Richtung die Richtung der Kraft  $R$  ist; und da nun diese Richtung offenbar mit der identisch ist, welche den durch die Formeln:

$$\cos \varphi = \frac{L}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}},$$

$$\cos \psi = \frac{M}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}},$$

$$\cos \chi = \frac{N}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}}$$

bestimmten Winkeln  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\chi$  entspricht, so sieht man, dass, wie schon erinnert, beide Bestimmungen der Kraft  $R$  ganz auf Dasselbe hinauslaufen, und dass es also der Einfachheit wegen verstatet ist, im Folgenden bloss:





also, weil nach der Voraussetzung

$$LL_1 + MM_1 + NN_1 = 0$$

ist:

$$M(M_1 - LZ + NX) = 0,$$

$$N(N_1 - MX + LY) = 0,$$

$$L(L_1 - NY + MZ) = 0.$$

Nach der Voraussetzung verschwinden die drei Grössen  $L$ ,  $M$ ,  $N$  nicht sämmtlich, und mindestens eine verschwindet also nicht, was uns auf die Betrachtung der drei folgenden Fälle führt.

Es verschwinde  $L$  nicht. Nach dem Vorhergehenden folgt aus den beiden Gleichungen:

$$M_1 - LZ + NX = 0,$$

$$N_1 - MX + LY = 0$$

durch Elimination von  $X$  die Gleichung:

$$L(L_1 - NY + MZ) = 0,$$

also, weil  $L$  nicht verschwindet, die Gleichung:

$$L_1 - NY + MZ = 0;$$

und um also  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  so zu bestimmen, dass den drei Gleichungen 10) vollständig genügt wird, ist es bloss nöthig, die Grössen  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  so zu bestimmen, dass den zwei Gleichungen:

$$M_1 - LZ + NX = 0,$$

$$N_1 - MX + LY = 0$$

genügt wird, was mittelst der Formeln:

$$11) \dots Y = \frac{MX - N_1}{L}, \quad Z = \frac{NX + M_1}{L};$$

in denen man für  $X$  jeden Werth setzen kann, wegen des nicht verschwindenden  $L$  auf unendlich viele verschiedene Arten mittelst endlicher völlig bestimmter Ausdrücke möglich ist.

**Es verschwinde  $M$  nicht.** Nach dem Vorhergehenden aus den beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} N_1 - MX + LY &= 0, \\ L_1 - NY + MZ &= 0 \end{aligned}$$

b Elimination von  $Y$  die Gleichung:

$$M(M_1 - LZ + NX) = 0,$$

weil  $M$  nicht verschwindet, die Gleichung:

$$M_1 - LZ + NX = 0;$$

um also  $X, Y, Z$  so zu bestimmen, dass den drei Gleichungen vollständig genügt wird, ist es bloss nöthig, die Grössen  $Y, Z$  so zu bestimmen, dass den zwei Gleichungen:

$$\begin{aligned} N_1 - MX + LY &= 0, \\ L_1 - NY + MZ &= 0 \end{aligned}$$

genügt wird, was mittelst der Formeln:

$$Z = \frac{NY - L_1}{M}, \quad X = \frac{LY + N_1}{M};$$

man man für  $Y$  jeden Werth setzen kann, wegen des nicht verschwindenden  $M$  auf unendlich viele verschiedene Arten mit-  
endlicher völlig bestimmter Ausdrücke möglich ist.

**Es verschwinde  $N$  nicht.** Nach dem Vorhergehenden aus den Gleichungen:

$$\begin{aligned} L_1 - NY + MZ &= 0, \\ M_1 - LZ + NX &= 0 \end{aligned}$$

a Elimination von  $Z$  die Gleichung:

$$N(N_1 - MX + LY) = 0,$$

weil  $N$  nicht verschwindet, die Gleichung:

$$N_1 - MX + LY = 0;$$

um also  $X, Y, Z$  so zu bestimmen, dass den drei Gleichungen vollständig genügt wird, ist es bloss nöthig, die Grössen  $Y, Z$  so zu bestimmen, dass den Gleichungen:

$$\begin{aligned} L_1 - NY + MZ &= 0, \\ M_1 - LZ + NX &= 0 \end{aligned}$$

genügt wird, was mittelst der Formeln:





$$R' \cos \psi' = B', \quad R' \cos \chi' = C'$$

ist, die man jedoch so auswählt, dass weder sie selbst, noch wenn man

$$M + B' = M', \quad N + C' = N'$$

setzt, die Grössen  $M'$  und  $N'$  beide verschwinden, was offenbar immer auf unendlich viele verschiedene Arten möglich ist. Für man diese Ausdrücke von  $M'$  und  $N'$ , und den Ausdruck  $L + R' \cos$  von  $L'$  in die Gleichung

$$L_1 L' + M_1 M' + N_1 N' = 0$$

ein, so wird dieselbe:

$$L_1(L + R' \cos \varphi') + M_1(M + B') + N_1(N + C') = 0,$$

woraus sich, wenn der Kürze wegen:

$$16) \dots A' = - \frac{L_1 L + M_1(M + B') + N_1(N + C')}{L_1}$$

oder:

$$17) \dots A' = - \frac{LL_1 + MM_1 + NN_1 + (B'M_1 + C'N_1)}{L_1}$$

gesetzt wird, wo, weil  $L_1$  nicht verschwindet,  $A'$  eine endlich völlig bestimmte Grösse ist:

$$R' \cos \varphi' = A'$$

ergibt. Also hat man zur Bestimmung von  $R'$  und  $\varphi'$ ,  $\psi'$ , die Gleichungen:

$$R' \cos \varphi' = A', \quad R' \cos \psi' = B', \quad R' \cos \chi' = C';$$

aus denen man auf bekannte Weise:

18)

$$R' = \pm \sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2};$$

$$\cos \varphi' = \frac{A'}{R'} = \pm \frac{A'}{\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}},$$

$$\cos \psi' = \frac{B'}{R'} = \pm \frac{B'}{\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}},$$

$$\cos \chi' = \frac{C'}{R'} = \pm \frac{C'}{\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}$$

erhält, wo  $R'$  nicht verschwindet und die Ausdrücke von  $\cos$

$\cos \psi'$ ,  $\cos \chi'$  endliche völlig bestimmte Grössen sind, weil die Grössen  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  nicht sämtlich verschwinden, wodurch also unsere Behauptung im vorliegenden Falle vollständig gerechtfertigt ist.

Wenn  $M_1$  nicht verschwindet, so setze man  $R' \cos \chi'$  und  $R' \cos \varphi'$  zwei beliebigen Werthen  $C'$  und  $A'$  gleich, so dass also:

$$R' \cos \chi' = C', \quad R' \cos \varphi' = A'$$

ist, die man jedoch so auswählt, dass weder sie selbst, noch, wenn man

$$N + C' = N', \quad L + A' = L'$$

setzt, die Grössen  $N'$  und  $L'$  beide verschwinden, was offenbar immer auf unendlich viele verschiedene Arten möglich ist. Führt man diese Ausdrücke von  $N'$  und  $L'$ , und den Ausdruck  $M + R' \cos \psi'$  von  $M'$  in die Gleichung

$$L_1 L' + M_1 M' + N_1 N' = 0$$

ein, so wird dieselbe:

$$L_1(L + A') + M_1(M + R' \cos \psi') + N_1(N + C') = 0,$$

woraus sich, wenn man der Kürze wegen:

$$19) \quad \dots B' = - \frac{L_1(L + A') + M_1 M + N_1(N + C')}{M_1}$$

oder:

$$20) \quad \dots B' = - \frac{LL_1 + MM_1 + NN_1 + (C'N_1 + A'L_1)}{M_1}$$

setzt, wo, weil  $M_1$  nicht verschwindet,  $B'$  eine endliche völlig bestimmte Grösse ist,

$$R' \cos \psi' = B'$$

ergibt. Also hat man zur Bestimmung von  $R'$  und  $\varphi'$ ,  $\psi'$ ,  $\chi'$  die Gleichungen:

$$R' \cos \varphi' = A', \quad R' \cos \psi' = B', \quad R' \cos \chi' = C';$$

aus denen sich auf bekannte Weise:

21)

$$R' = \pm \sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2};$$

$$\cos \varphi' = \frac{A'}{R'} = \pm \frac{A'}{\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}},$$

$$\cos \psi' = \frac{B'}{R'} = \pm \frac{B'}{\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}},$$

$$\cos \chi' = \frac{C'}{R'} = \pm \frac{C'}{\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}$$

ergibt, wo  $R'$  nicht verschwindet und die Ausdrücke von  $\cos \varphi'$ ,  $\cos \psi'$ ,  $\cos \chi'$  endliche völlig bestimmte Grössen sind, weil die Grössen  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  nicht sämmtlich verschwinden, wodurch also unsere Behauptung auch in diesem Falle vollständig gerechtfertigt ist.

Wenn  $N_1$  nicht verschwindet, so setze man  $R' \cos \varphi'$  und  $R' \cos \psi'$  zwei beliebigen Werthen  $A'$  und  $B'$  gleich, so dass also

$$R' \cos \varphi' = A', \quad R' \cos \psi' = B'$$

ist, die man aber so auswählt, dass weder sie selbst, noch, wenn man

$$L + A' = L', \quad M + B' = M'$$

setzt, die Grössen  $L'$  und  $M'$  beide verschwinden, was offenbar immer auf unendlich viele verschiedene Arten möglich ist. Fügt man diese Ausdrücke von  $L'$  und  $M'$ , und den Ausdruck  $N + R' \cos \chi'$  von  $N'$  in die Gleichung:

$$L_1 L' + M_1 M' + N_1 N' = 0$$

ein, so wird dieselbe:

$$L_1 (L + A') + M_1 (M + B') + N_1 (N + R' \cos \chi') = 0;$$

woraus sich, wenn der Kürze wegen:

$$22) \dots C' = - \frac{L_1 (L + A') + M_1 (M + B') + N_1 N}{N_1}$$

oder:

$$23) \dots C' = - \frac{LL_1 + MM_1 + NN_1 + (A'L_1 + B'M_1)}{N_1}$$

gesetzt wird, wo, weil  $N_1$  nicht verschwindet,  $C'$  eine endlich völlig bestimmte Grösse ist,



$$R' \cos \chi' = C'$$

gibt. Also hat man zur Bestimmung von  $R'$  und  $\varphi'$ ,  $\psi'$ ,  $\chi'$  3 Gleichungen:

$$R' \cos \varphi' = A', \quad R' \cos \psi' = B', \quad R' \cos \chi' = C';$$

denen sich auf bekannte Weise:

24)

$$R' = \pm \sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2};$$

$$\cos \varphi' = \frac{A'}{R'} = \pm \frac{A'}{\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}},$$

$$\cos \psi' = \frac{B'}{R'} = \pm \frac{B'}{\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}},$$

$$\cos \chi' = \frac{C'}{R'} = \pm \frac{C'}{\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}$$

gibt, wo  $R'$  nicht verschwindet und die Ausdrücke von  $\cos \varphi'$ ,  $\cos \psi'$ ,  $\cos \chi'$  endliche völlig bestimmte Grössen sind, weil die Grössen  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  nicht sämmtlich verschwinden, wodurch also unsere Behauptung auch in diesem Falle vollständig gerechtfertigt ist.

Unsere obige Behauptung ist also jetzt in allen Fällen vollständig gerechtfertigt.

Diese so eben bestimmte nicht verschwindende Kraft  $R'$  mit der durch die Winkel  $\varphi'$ ,  $\psi'$ ,  $\chi'$  ihrer Lage nach bestimmten Richtungslinie und eine dieser Kraft absolut gleiche, also wie diese nicht verschwindende, aber nach direct entgegengesetzter Richtung wirkende Kraft, welche wir durch  $R_1'$  bezeichnen wollen, setzen wir uns nun im Anfange der Coordinaten wirkend, wodurch in der Wirkung der Kräfte

$$P_0, P_1, P_2, P_3, \dots P_n$$

nicht das Geringste geändert wird.

Nach 14) ist:

$$L' = \Sigma P \cos \alpha + R' \cos \varphi',$$

$$M' = \Sigma P \cos \beta + R' \cos \psi',$$

$$N' = \Sigma P \cos \gamma + R' \cos \chi';$$

und setzen wir nun:

$$N_1' = \Sigma P (x \cos \beta - y \cos \alpha) + R' (0 \cdot \cos \psi' - 0 \cdot \cos \varphi'),$$

$$L_1' = \Sigma P (y \cos \gamma - z \cos \beta) + R' (0 \cdot \cos \chi' - 0 \cdot \cos \psi'),$$

$$M_1' = \Sigma P (z \cos \alpha - x \cos \gamma) + R' (0 \cdot \cos \varphi' - 0 \cdot \cos \chi');$$

so ist:

$$25) \quad \left\{ \begin{array}{l} N_1' = \Sigma P (x \cos \beta - y \cos \alpha) = N_1, \\ L_1' = \Sigma P (y \cos \gamma - z \cos \beta) = L_1, \\ M_1' = \Sigma P (z \cos \alpha - x \cos \gamma) = M_1; \end{array} \right.$$

also:

$$L'L_1' + M'M_1' + N'N_1' = L_1L' + M_1M' + N_1N',$$

und folglich nach 15):

$$26) \quad \dots \dots L'L_1' + M'M_1' + N'N_1' = 0.$$

Weil nun bekanntlich nach dem Obigen ausserdem  $L'$ ,  $M'$ ,  $N'$  nicht sämmtlich verschwinden, so können nach dem früher Bewiesenen die Kräfte

$$P_0, P_1, P_2, P_3, \dots P_n, R'$$

auf eine nicht verschwindende Resultirende zurückgeführt werden, die wir durch  $R$ ; die Bestimmungswinkel ihrer Richtungslinie durch  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\chi$ ; die Coordinaten eines ihrer Angriffspunkte durch  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  bezeichnen wollen. Also können die Kräfte

$$P_0, P_1, P_2, P_3, \dots P_n, R', R_1'$$

und folglich auch die Kräfte

$$P_0, P_1, P_2, P_3, \dots P_n,$$

auf die beiden nicht verschwindenden Kräfte  $R$  und  $R_1'$  zurückgeführt werden, deren letztere durch den Anfang der Coordinaten geht, womit also der folgende Satz bewiesen ist:

**Die Kräfte**

$$P_0, P_1, P_2, P_3, \dots P_n$$

lassen sich in allen Fällen auf zwei nicht verschwindende Kräfte zurückführen, von denen die eine durch einen beliebigen gegebenen Punkt geht.

Wie die Kräfte  $R_1'$  und  $R$  in allen Fällen unzweideutig bestimmt werden können, erhellt aus dem Obigen ganz von selbst.

Endlich wollen wir nun noch den Fall betrachten, wenn

$$L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0$$

ist. Weil die Kraft  $R$  im Vorhergehenden die Resultirende von

$$P_0, P_1, P_2, P_3, \dots P_n, R'$$

ist, so ist bekanntlich allgemein:

$$R \cos \varphi = \Sigma P \cos \alpha + R' \cos \varphi',$$

$$R \cos \psi = \Sigma P \cos \beta + R' \cos \psi',$$

$$R \cos \chi = \Sigma P \cos \gamma + R' \cos \chi'$$

oder:

$$R \cos \varphi = L + R' \cos \varphi',$$

$$R \cos \psi = M + R' \cos \psi',$$

$$R \cos \chi = N + R' \cos \chi';$$

also wegen der Voraussetzung:

$$R \cos \varphi = R' \cos \varphi', \quad R \cos \psi = R' \cos \psi', \quad R \cos \chi = R' \cos \chi';$$

woraus man leicht schliesst, dass die Kräfte  $R$  und  $R'$  der absoluten Grösse und der Richtung nach gleich sind\*), womit na-

\*) Aus den Gleichungen:

$$P \cos \alpha = P_1 \cos \alpha_1, \quad P \cos \beta = P_1 \cos \beta_1, \quad P \cos \gamma = P_1 \cos \gamma_1;$$

wo  $\alpha, \beta, \gamma$  und  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$  im Allgemeinen die Bestimmungswinkel der Richtungslinien der Kräfte  $P$  und  $P_1$  sind, folgt, wenn man dieselben quadriert und dann zu einander addirt, wegen der bekannten Gleichungen:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1, \quad \cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \beta_1 + \cos^2 \gamma_1 = 1$$

sogleich:

$$P^2 = P_1^2,$$

also mit Beziehung der oberen und unteren Zeichen auf einander:

$$P_1 = \pm P;$$

$$\cos \alpha_1 = \pm \cos \alpha, \quad \alpha_1 = \begin{cases} \alpha \\ 180^\circ - \alpha \end{cases}$$

$$\cos \beta_1 = \pm \cos \beta, \quad \beta_1 = \begin{cases} \beta \\ 180^\circ - \beta \end{cases}$$

$$\cos \gamma_1 = \pm \cos \gamma; \quad \gamma_1 = \begin{cases} \gamma \\ 180^\circ - \gamma. \end{cases}$$



$$P_0, P_1, P_2, P_3, \dots P_n$$

welche sich auf jene Kräfte zurückführen lassen, sind unter einander im Gleichgewichte. Daher lässt sich jetzt der folgende Satz aussprechen:

Wenn

$$L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0$$

ist, so lassen sich die Kräfte

$$P_0, P_1, P_2, P_3, \dots P_n$$

auf ein Kräftepaar zurückführen, oder dieselben sind unter einander im Gleichgewichte.

Das Resultat unserer ganzen Untersuchung lässt sich nun in den folgenden Sätzen zusammenfassen:

1. Wenn es für die Kräfte

$$P_0, P_1, P_2, P_3, \dots P_n$$

eine Resultirende giebt, so ist immer:

$$LL_1 + MM_1 + NN_1 = 0.$$

2. Wenn die Gleichung

$$LL_1 + MM_1 + NN_1 = 0$$

nicht erfüllt ist, so giebt es für die Kräfte

$$P_0, P_1, P_2, P_3, \dots P_n$$

keine Resultirende.

3. Wenn die Gleichung

$$LL_1 + MM_1 + NN_1 = 0$$

erfüllt ist, und die drei Grössen  $L$ ,  $M$ ,  $N$  nicht sämtlich verschwinden, so giebt es für die Kräfte

$$P_0, P_1, P_2, P_3, \dots P_n$$

immer eine nicht verschwindende völlig bestimmte Resultirende.

4. Wenn die Grössen  $L$ ,  $M$ ,  $N$  sämtlich verschwinden, so lassen sich die Kräfte

$$P_0, P_1, P_2, P_3, \dots P_n$$

entweder auf ein Kräftepaar zurückführen, oder die selben sind unter einander im Gleichgewichte.

### 5. Die Kräfte

$$P_0, P_1, P_2, P_3, \dots P_n$$

lassen sich in allen Fällen auf zwei nicht verschwindende Kräfte zurückführen, von denen die eine durch einen beliebigen gegebenen Punkt geht.

### §. 8.

#### Bedingungen der Ruhe eines um einen festen Punkt drehbaren Systems.

Alle im Vorhergehenden eingeführten Bezeichnungen beibehaltend, wollen wir nun die nothwendigen Bedingungen für den Zustand der Ruhe eines um einen festen Punkt drehbaren Systems aufsuchen.

Grösserer Einfachheit wegen wollen wir den festen Punkt als Anfang der Coordinaten annehmen.

Zuerst wollen wir voraussetzen, dass

$$L_1 = 0, \quad M_1 = 0, \quad N_1 = 0$$

sei. Ist dann auch

$$L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0;$$

so sind nach §. 6. die Kräfte

$$P_0, P_1, P_2, P_3, \dots P_n$$

unter einander im Gleichgewichte, und das System befindet sich also natürlich in Ruhe. Ist nicht zugleich

$$L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0;$$

so ist wegen der Voraussetzung

$$L_1 = 0, \quad M_1 = 0, \quad N_1 = 0$$

doch

$$LL_1 + MM_1 + NN_1 = 0,$$

und nach §. 7. lassen sich also die Kräfte

$$P_0, P_1, P_2, P_3, \dots P_n$$

auf eine nicht verschwindende Resultirende zurückführen, für welche man in bekannter Bezeichnung die Gleichungen:

$$\begin{aligned} N_1 - MX + LY &= 0, \\ L_1 - NY + MZ &= 0, \\ M_1 - LZ + NX &= 0 \end{aligned}$$

hat, welche wegen der Voraussetzung

$$L_1 = 0, \quad M_1 = 0, \quad N_1 = 0$$

in diesem Falle in die Gleichungen:

$$\begin{aligned} MX - LY &= 0, & MX &= LY, \\ NY - MZ &= 0, & \text{oder:} & \quad NY = MZ, \\ LZ - NX &= 0; & LZ &= NX \end{aligned}$$

übergehen. Verschwindet nun etwa  $L$  nicht, so liefern diese Gleichungen die Formeln:

$$Y = \frac{M}{L} X, \quad Z = \frac{N}{L} X;$$

aus denen sich für  $X = 0$  auch  $Y = 0$  und  $Z = 0$  ergibt, und daher erhellet, dass die eine Resultirende, auf welche sich das System zurückführen lässt, durch den Anfang der Coordinaten geht, also von diesem als einem festen Punkte aufgehoben wird, und daher das System sich in Ruhe befindet. Ganz eben so schliesst man, wenn  $M$  oder  $N$  nicht verschwindet.

Hieraus ergibt sich, dass, wenn

$$L_1 = 0, \quad M_1 = 0, \quad N_1 = 0$$

ist, das System sich jederzeit in Ruhe befindet.

Ferner wollen wir annehmen, dass nicht zugleich

$$L_1 = 0, \quad M_1 = 0, \quad N_1 = 0$$

sei. Nach §. 7. lassen sich die Kräfte

$$P_0, P_1, P_2, P_3, \dots P_n$$

auf zwei nicht verschwindende Kräfte  $R$  und  $R_1'$  zurückführen, deren letztere durch den Anfang der Coordinaten geht und daher von diesem als einem festen Punkte aufgehoben wird, so dass also bloss die Kraft  $R$ , welche die nicht verschwindende Resultirende der Kräfte

gespunct der Coordinaten an-

$$l_1 = 0, \quad N_1 = 0;$$

$$\beta - y \cos \alpha = 0,$$

$$\gamma - z \cos \beta = 0,$$

$$\epsilon - x \cos \gamma = 0;$$

gungsgleichungen für den Zu-  
systems.

### §. 9.

ines um eine feste Axe dreh-  
baren Systems.

über eingeführten Bezeichnungen auch jetzt beibehal-  
en wir nun die nothwendigen Bedingungen der Ruhe  
eine feste Axe drehbaren Systems aufsuchen.

erer Einfachheit wegen nehmen wir die feste Axe als  
z an.

1 §. 7. lassen sich die Kräfte

$$P_0, P_1, P_2, P_3, \dots P_n$$

mit nicht verschwindende Kräfte  $R$  und  $R_1'$  zurückführen,  
letztere durch den Anfang der Coordinaten geht und daher  
lesen, als einem Punkte der festen Axe, ganz aufgehoben  
so dass also bloss die Kraft  $R$ , welche die nicht verschwin-  
Resultirende der Kräfte

$$P_0, P_1, P_2, P_3, \dots P_n, R'$$

rig bleibt. Für diese Kraft haben wir nach §. 7. die Glei-  
ch:

$$R \cos \varphi = L', \quad R \cos \psi = M', \quad R \cos \chi = N';$$

$$N_1 - M'X + L'Y = 0,$$

$$L_1 - N'Y + M'Z = 0,$$

$$M_1 - L'Z + N'X = 0.$$

erst wollen wir annehmen, dass



$$P_0, P_1, P_2, P_3, \dots P_n, R'$$

ist, übrig bleibt. Für diese Kraft haben wir in den im vorhergehenden Paragraphen eingeführten Bezeichnungen die Gleichungen:

$$N_1' - M'X + L'Y = 0,$$

$$L_1' - N'Y + M'Z = 0,$$

$$M_1' - L'Z + N'X = 0;$$

oder, weil nach dem vorhergehenden Paragraphen

$$L_1' = L_1, \quad M_1' = M_1, \quad N_1' = N_1$$

ist, die Gleichungen:

$$N_1 - M'X + L'Y = 0,$$

$$L_1 - N'Y + M'Z = 0,$$

$$M_1 - L'Z + N'X = 0.$$

Ginge nun die nicht verschwindende Kraft  $R$  durch den Anfang der Coordinaten, so müsste zugleich

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0;$$

also nach den vorstehenden Gleichungen zugleich

$$L_1 = 0, \quad M_1 = 0, \quad N_1 = 0$$

sein, was gegen die Voraussetzung streitet. Daher kann die nicht verschwindende Kraft  $R$ , auf welche das System sich zuletzt reduciren liess, nicht durch den Anfang der Coordinaten, also nicht durch den festen Punkt gehen, und das System kann also nicht in Ruhe sein.

Hieraus ergibt sich, dass, wenn nicht zugleich

$$L_1 = 0, \quad M_1 = 0, \quad N_1 = 0$$

ist, das System sich nicht in Ruhe befindet.

Wenn also das System sich in Ruhe befindet, so ist zugleich

$$L_1 = 0, \quad M_1 = 0, \quad N_1 = 0.$$

Aus den hier bewiesenen Sätzen ergibt sich der folgende allgemeine Satz:

Wenn das System, an welchem die Kräfte

$$P_0, P_1, P_2, P_3, \dots P_n$$

wirken, um einen festen Punkt drehbar ist, und man

diesen Punkt als Anfangspunkt der Coordinaten annimmt; so sind:

$$L_1 = 0, \quad M_1 = 0, \quad N_1 = 0;$$

nämlich:

$$\Sigma P(x \cos \beta - y \cos \alpha) = 0,$$

$$\Sigma P(y \cos \gamma - z \cos \beta) = 0,$$

$$\Sigma P(z \cos \alpha - x \cos \gamma) = 0;$$

die nothwendigen Bedingungsgleichungen für den Zustand der Ruhe dieses Systems.

### §. 9.

**Bedingungen der Ruhe eines um eine feste Axe drehbaren Systems.**

Alle früher eingeführten Bezeichnungen auch jetzt beibehaltend, wollen wir nun die nothwendigen Bedingungen der Ruhe eines um eine feste Axe drehbaren Systems aufsuchen.

Grösserer Einfachheit wegen nehmen wir die feste Axe als Axe der  $z$  an.

Nach §. 7. lassen sich die Kräfte

$$P_0, P_1, P_2, P_3, \dots P_n$$

auf zwei nicht verschwindende Kräfte  $R$  und  $R_1'$  zurückführen, deren letztere durch den Anfang der Coordinaten geht und daher von diesem, als einem Punkte der festen Axe, ganz aufgehoben wird, so dass also bloss die Kraft  $R$ , welche die nicht verschwindende Resultirende der Kräfte

$$P_0, P_1, P_2, P_3, \dots P_n, R'$$

ist, übrig bleibt. Für diese Kraft haben wir nach §. 7. die Gleichungen:

$$R \cos \varphi = L', \quad R \cos \psi = M', \quad R \cos \chi = N';$$

$$N_1 - M'X + L'Y = 0,$$

$$L_1 - N'Y + M'Z = 0,$$

$$M_1 - L'Z + N'X = 0.$$

Zuerst wollen wir annehmen, dass

$$N_1 = 0$$

sei. Dann ist wegen der vorhergehenden Gleichungen:

$$M'X - L'Y = 0 \text{ oder } M'X = L'Y.$$

Ist nun zugleich

$$L' = 0, \quad M' = 0;$$

so ist:

$$R \cos \varphi = 0, \quad R \cos \psi = 0;$$

also, weil  $R$  nicht verschwindet:

$$\cos \varphi = 0, \quad \cos \psi = 0;$$

folglich:

$$\varphi = 90^\circ, \quad \psi = 90^\circ.$$

Daher steht die Kraft  $R$  auf den Axen der  $x$  und  $y$ , also auf Ebene der  $xy$  senkrecht, und ist folglich der Axe der  $z$ , nämlich der festen Axe, parallel, kann also offenbar keine Drehung Systems um diese Axe hervorbringen. Wenn ferner nicht gleich

$$L' = 0, \quad M' = 0$$

ist, so folgt aus der Gleichung

$$M'X = L'Y$$

offenbar, dass immer gleichzeitig

$$X = 0 \quad Y = 0$$

ist, also die Kraft  $R$  durch die Axe der  $z$ , nämlich durch feste Axe geht, von welcher sie aufgehoben wird, so dass das System wieder in Ruhe ist.

Hieraus ergibt sich, dass, wenn

$$N_1 = 0$$

ist, das System sich in Ruhe befindet.

Ferner wollen wir annehmen, dass nicht

$$N_1 = 0$$

sei. Dann ist wegen der Gleichung

$$N_1 - M'X + L'Y = 0$$

nicht

$$M'X - L'Y = 0$$

der nicht

$$M'X = L'Y.$$

Also ist nicht zugleich

$$L' = 0, \quad M' = 0$$

und auch nicht zugleich

$$X = 0, \quad Y = 0;$$

woraus sich leicht ergibt, dass die nicht verschwindende Kraft  $R$  nicht der Axe der  $z$ , nämlich der festen Axe, parallel ist und auch nicht durch dieselbe geht, woraus sich leicht ergibt, dass das System nicht in Ruhe sein kann, wenn man sich nur die auf der festen Axe und der Richtungslinie der Kraft  $R$  zugleich senkrecht stehende Gerade denkt, und in dem Punkte, in welchem von dieser Geraden die Richtungslinie der Kraft  $R$  getroffen wird, in der durch diesen Punkt senkrecht gegen die in Rede stehende Gerade gelegten Ebene, die Kraft  $R$  in zwei, natürlich auf der in Rede stehenden Geraden senkrecht stehende Kräfte zerlegt, von denen die eine der festen Axe parallel ist, die andere jedenfalls nie verschwindende auf der festen Axe (natürlich ohne dieselbe zu schneiden) senkrecht steht, wobei man sich an die bekannte geometrische Construction der kürzesten Entfernung zweier geraden Linien im Raume zu erinnern hat.

Hieraus folgt, dass, wenn nicht

$$N_1 = 0$$

ist, das System sich nicht in Ruhe befindet.

Wenn also das System sich in Ruhe befindet, so ist

$$N_1 = 0.$$

Die beiden vorhergehenden Sätze fassen wir in dem folgenden Satze zusammen:

Wenn das System, an welchem die Kräfte

$$P_0, P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$$

wirken, um eine feste Axe drehbar ist, und diese feste Axe als Axe der  $z$  angenommen wird; so ist

$$N_1 = 0,$$

nämlich:

$$\sum P(x \cos \beta - y \cos \alpha) = 0,$$

die notwendige Bedingungsgleichung für den Zustand der Ruhe dieses Systems.

## §. 10.

## Parallele Kräfte.

Wenn die Richtungslinien der sämtlichen Kräfte

$$P_0, P_1, P_2, P_3, \dots P_n$$

unter einander parallel sind, so kann man sich eine beliebige Gerade im Raume denken, welche den sämtlichen Richtungslinien parallel ist; bezeichnet man dann die Bestimmungswinkel dieser Geraden durch  $\alpha, \beta, \gamma$ , so können  $\alpha, \beta, \gamma$  als die Bestimmungswinkel der sämtlichen Richtungslinien betrachtet werden und man kann also im Obigen:

$$\alpha = \alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_n,$$

$$\beta = \beta_0 = \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \dots = \beta_n,$$

$$\gamma = \gamma_0 = \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \dots = \gamma_n$$

setzen, wo dann alle nach der durch die Winkel  $\alpha, \beta, \gamma$  bestimmten Richtung, welche natürlich beliebig gewählt werden kann, hin wirkenden Kräfte als positiv, die in der entgegengesetzten Richtung hin wirkenden Kräfte als negativ betrachtet werden.

Unter diesen Voraussetzungen werden nach §. 6. die Bedingungsgleichungen des Gleichgewichts in diesem Falle offenbar

$$\cos \alpha \sum P = 0, \quad \cos \beta \sum P = 0, \quad \cos \gamma \sum P = 0;$$

$$\cos \beta \sum P x = \cos \alpha \sum P y,$$

$$\cos \gamma \sum P y = \cos \beta \sum P z,$$

$$\cos \alpha \sum P z = \cos \gamma \sum P x;$$

weil aber wegen der Gleichung

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

wenigstens einer der drei Cosinus  $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$  nicht schwindet, so werden die vorstehenden Bedingungsgleichungen

$$1) \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} \sum P = 0; \\ \cos \beta \sum P x = \cos \alpha \sum P y, \\ \cos \gamma \sum P y = \cos \beta \sum P z, \\ \cos \alpha \sum P z = \cos \gamma \sum P x. \end{array} \right.$$



Weil hiernach:

$$\begin{aligned} & LL_1 + MM_1 + NN_1 \\ &= \cos \gamma \cos \alpha \Sigma P \cdot \Sigma P_y - \cos \alpha \cos \beta \Sigma P \cdot \Sigma P_z \\ &\quad + \cos \alpha \cos \beta \Sigma P \cdot \Sigma P_z - \cos \beta \cos \gamma \Sigma P \cdot \Sigma P_x \\ &\quad + \cos \beta \cos \gamma \Sigma P \cdot \Sigma P_x - \cos \gamma \cos \alpha \Sigma P \cdot \Sigma P_y \end{aligned}$$

ist, so ist im vorliegenden Falle offenbar die Gleichung

$$LL_1 + MM_1 + NN_1 = 0$$

immer erfüllt.

Aus den Formeln

$$L = \cos \alpha \Sigma P, \quad M = \cos \beta \Sigma P, \quad N = \cos \gamma \Sigma P$$

erhellet, weil  $\cos \alpha$ ,  $\cos \beta$ ,  $\cos \gamma$  nicht zugleich verschwinden, d  
nur zugleich

$$L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0$$

sein kann, wenn  $\Sigma P = 0$  ist.

Daher ergiebt sich aus dem oben ein für allemal angezogene  
Paragraphen, dass, wenn nicht  $\Sigma P = 0$  ist, die parallelen Kr  
immer auf eine nicht verschwindende Resultirende zurückgefi  
werden können. Weil

$$L^2 + M^2 + N^2 = (\Sigma P)^2$$

ist, so ist, wenn  $(\Sigma P)$  den absoluten Werth von  $\Sigma P$  bezeich  
nach §. 7. 9):

$$R = (\Sigma P)$$

und:

$$\cos \varphi = \cos \alpha \frac{\Sigma P}{(\Sigma P)}, \quad \cos \psi = \cos \beta \frac{\Sigma P}{(\Sigma P)}, \quad \cos \chi = \cos \gamma \frac{\Sigma P}{(\Sigma P)}$$

also:

$$\cos \varphi = \pm \cos \alpha, \quad \cos \psi = \pm \cos \beta, \quad \cos \chi = \pm \cos \gamma;$$

$$\varphi = \begin{cases} \alpha \\ 180^\circ - \alpha \end{cases} \quad \psi = \begin{cases} \beta \\ 180^\circ - \beta \end{cases} \quad \chi = \begin{cases} \gamma \\ 180^\circ - \gamma \end{cases}$$

wenn man die oberen oder unteren Werthe nimmt, jenachd  
 $\Sigma P$  positiv oder negativ ist. Man sieht hieraus, dass die Ri  
tungslinie der Resultirenden den Richtungslinien der sämtlic  
gegebenen Kräfte parallel ist, und da das positive  $R$  nach  
durch die Winkel  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\chi$  bestimmten Richtung hin wirkt,  
wirkt  $R$  nach der Richtung der positiven oder negativen Kr

1, jenachdem  $\Sigma P$  positiv oder negativ ist; mit Rücksicht hierauf kann man

$$7) \dots \dots \dots R = \Sigma P$$

tzen, wo dann durch das Vorzeichen von  $R$  zugleich die Richtung bestimmt wird, nach welcher die den sämtlichen gegebenen Kräften parallele Resultirende hin wirkt.

Zwischen den Coordinaten  $X, Y, Z$  haben wir nach §. 7. 10) und oben nach 6) die Gleichungen:

8)

$$\cos \beta \Sigma P x - \cos \alpha \Sigma P y - X \cos \beta \Sigma P + Y \cos \alpha \Sigma P = 0,$$

$$\cos \gamma \Sigma P y - \cos \beta \Sigma P z - Y \cos \gamma \Sigma P + Z \cos \beta \Sigma P = 0,$$

$$\cos \alpha \Sigma P z - \cos \gamma \Sigma P x - Z \cos \alpha \Sigma P + X \cos \gamma \Sigma P = 0;$$

oder:

9)

$$(X \cos \beta - Y \cos \alpha) \Sigma P = \cos \beta \Sigma P x - \cos \alpha \Sigma P y,$$

$$(Y \cos \gamma - Z \cos \beta) \Sigma P = \cos \gamma \Sigma P y - \cos \beta \Sigma P z,$$

$$(Z \cos \alpha - X \cos \gamma) \Sigma P = \cos \alpha \Sigma P z - \cos \gamma \Sigma P x.$$

Setzt man:

$$X = \frac{\Sigma P x}{\Sigma P}, \quad Y = \frac{\Sigma P y}{\Sigma P}, \quad Z = \frac{\Sigma P z}{\Sigma P};$$

welches, insofern  $\Sigma P$ , wie wir hier voraussetzen, nicht verschwindet, endliche völlig bestimmte Werthe sind; so werden die vorstehenden Gleichungen:

$$\cos \beta \Sigma P x - \cos \alpha \Sigma P y = \cos \beta \Sigma P x - \cos \alpha \Sigma P y,$$

$$\cos \gamma \Sigma P y - \cos \beta \Sigma P z = \cos \gamma \Sigma P y - \cos \beta \Sigma P z,$$

$$\cos \alpha \Sigma P z - \cos \gamma \Sigma P x = \cos \alpha \Sigma P z - \cos \gamma \Sigma P x;$$

und sind also vollständig erfüllt. Da es nun bloss darauf ankommt, einen Punkt der Richtungslinie der Resultirenden zu kennen, so genügt es zur Bestimmung der Resultirenden vollkommen:

$$10) \dots \dots X = \frac{\Sigma P x}{\Sigma P}, \quad Y = \frac{\Sigma P y}{\Sigma P}, \quad Z = \frac{\Sigma P z}{\Sigma P}$$

ben.

Die durch diese Formeln bestimmten Coordinaten  $X, Y, Z$  hängen nur von



$$P_0, P_1, P_2, P_3, \dots P_n$$

und

$$x_0, y_0, z_0; x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \dots x_n, y_n, z_n;$$

aber nicht von

$$\alpha_0, \beta_0, \gamma_0; \alpha_1, \beta_1, \gamma_1; \alpha_2, \beta_2, \gamma_2; \dots; \alpha_n, \beta_n, \gamma_n;$$

also nicht von der Lage der Richtungslinien der parallelen Kräfte im Raume ab. Daher bleibt der Punkt ( $XYZ$ ) derselbe, oder die Resultirende geht immer durch diesen Punkt, welche Lage auch die Richtungslinien der parallelen Kräfte im Raume haben mögen, wenn nur die Kräfte an sich und ihre Angriffspunkte ungeändert bleiben. Wegen dieser merkwürdigen Eigenschaft hat man den durch die Formeln 10) bestimmten Punkt den Mittelpunkt der parallelen Kräfte oder das Centrum der parallelen Kräfte genannt. Dass es einen solchen Punkt nur für solche parallele Kräfte giebt, für welche nicht  $\Sigma P = 0$  ist, ergibt sich aus dem Vorhergehenden von selbst.

Wenn  $\Sigma P = 0$  und also nach dem Obigen  $L = 0$ ,  $M = 0$ ,  $N = 0$  ist, lassen sich die gegebenen parallelen Kräfte nach §. 7. nur auf ein Kräftepaar zurückführen, oder dieselben sind unter einander im Gleichgewichte.

### §. 11.

In einer und derselben Ebene wirkende Kräfte.

Wenn die Kräfte

$$P_0, P_1, P_2, P_3, \dots P_n$$

sämmtlich in einer und derselben Ebene wirken, so nehmen wir diese Ebene als Ebene der  $xy$  an.

Unter dieser Voraussetzung ist:

$$\gamma_0 = \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 \dots = \gamma_n = 90^\circ,$$

also:

$$\cos \gamma_0 = \cos \gamma_1 = \cos \gamma_2 = \cos \gamma_3 = \dots = \cos \gamma_n = 0;$$

ferner

$$z_0 = z_1 = z_2 = z_3 = \dots z_n = 0.$$

Also sind nach §. 6. die Bedingungsgleichungen für den Zustand des Gleichgewichts:

$$1) \dots \Sigma P \cos \alpha = 0, \Sigma P \cos \beta = 0, \Sigma P(x \cos \beta - y \cos \alpha) = 0.$$







$$6) \dots \dots \dots \Sigma P = 0, \quad \Sigma P x = 0;$$

wo  $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots x_n$  sich auf die Durchschnittspunkte der Richtungslinien der parallelen Kräfte mit der Axe der  $x$  beziehen, welche Axe natürlich ganz beliebig angenommen werden kann, wenn sie nur die sämtlichen Richtungslinien schneidet.

Ist das System um einen festen Punkt drehbar, so nehmen man denselben als Anfang der Coordinaten an, und die Bedingungsgleichung für den Zustand der Ruhe ist dann nach 2):

$$7) \dots \dots \dots \cos \beta \Sigma P x = \cos \alpha \Sigma P y$$

oder, wenn man die Axe der  $x$  so annimmt, dass sie die sämtlichen Richtungslinien schneidet:

$$8) \dots \dots \dots \Sigma P x = 0,$$

wo  $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots x_n$  sich auf die Durchschnittspunkte der willkürlichen Axe der  $x$  mit den Richtungslinien beziehen.

Wenn nicht zugleich

$$L = \cos \alpha \Sigma P = 0, \quad M = \cos \beta \Sigma P = 0;$$

also, weil  $\cos \alpha, \cos \beta$  nicht zugleich verschwinden, wenn nicht  $\Sigma P = 0$  ist, so lassen sich die Kräfte nach dem Obigen auf eine nicht verschwindende Resultirende zurückführen, welche nach 3) offenbar durch die folgenden Formeln bestimmt wird:

$$R = \sqrt{(\cos \alpha^2 + \cos \beta^2) (\Sigma P)^2};$$

$$\cos \varphi = \frac{\cos \alpha \Sigma P}{\sqrt{(\cos \alpha^2 + \cos \beta^2) (\Sigma P)^2}},$$

$$\cos \psi = \frac{\cos \beta \Sigma P}{\sqrt{(\cos \alpha^2 + \cos \beta^2) (\Sigma P)^2}},$$

$$\cos \chi = 0;$$

also mittelst der Formeln:

$$R = (\Sigma P), \quad \cos \varphi = \cos \alpha \frac{\Sigma P}{(\Sigma P)}, \quad \cos \psi = \cos \beta \frac{\Sigma P}{(\Sigma P)}, \quad \cos \chi =$$

wo  $(\Sigma P)$  wieder den absoluten Werth von  $\Sigma P$  bezeichnet; oder

$$R = (\Sigma P), \quad \cos \varphi = \pm \cos \alpha, \quad \cos \psi = \pm \cos \beta, \quad \cos \chi = 0.$$

Die Resultirende wirkt also in derselben Ebene wie die gegebenen Kräfte und ist denselben parallel, und wenn man

$$9) \dots \dots \dots R = \Sigma P$$

setzt, so wird durch das Zeichen der Resultirenden zugleich ihre Richtung bestimmt, was ganz eben so erhellet wie in dem allgemeineren Falle in §. 10.

Zwischen  $X$ ,  $Y$  hat man nach 4) die Gleichung:

$$(X \cos \beta - Y \cos \alpha) \Sigma P = \cos \beta \Sigma P x - \cos \alpha \Sigma P y,$$

welche erfüllt wird, wenn man

$$10) \dots\dots\dots X = \frac{\Sigma P x}{\Sigma P}, \quad Y = \frac{\Sigma P y}{\Sigma P}$$

setzt, welche Werthe, wenn  $\Sigma P$  nicht verschwindet, endliche völlig bestimmte Grössen sind.

Der durch die vorstehenden Coordinaten bestimmte Punkt ( $XF$ ) heisst auch hier, wie in §. 10., und aus ähnlichen Gründen wie dort, der Mittelpunkt der parallelen Kräfte oder das Centrum der parallelen Kräfte.

Wenn  $\Sigma P = 0$  ist, so lassen sich die Kräfte nur auf ein Kräftepaar zurückführen oder dieselben sind unter einander im Gleichgewichte.

## §. 12.

Anderer Ausdruck der Bedingungen des Gleichgewichts.

Wir wollen uns eine beliebige Gerade denken, welche durch die Gleichungen:

$$1) \dots\dots\dots \frac{x-a}{\cos \theta} = \frac{y-b}{\cos \omega} = \frac{z-c}{\cos \bar{\omega}}$$

charakterisirt sein mag, und im Allgemeinen die Axe genannt werden soll.

Betrachten wir nun eine beliebige Kraft  $P_0$ , deren Richtungs-  
linie durch die Gleichungen:

$$2) \dots\dots\dots \frac{x-x_0}{\cos \alpha_0} = \frac{y-y_0}{\cos \beta_0} = \frac{z-z_0}{\cos \gamma_0}$$

charakterisirt ist.

Von dem Punkte  $(x_0 y_0 z_0)$  fällen wir auf die Axe ein Perpendikel, dessen auf der Axe liegenden Fusspunkt wir durch  $(X_0 Y_0 Z_0)$  bezeichnen. Die  $180^\circ$  nicht übersteigenden Winkel, welche die von dem Punkte  $(x_0 y_0 z_0)$  aus nach dem Punkte  $(X_0 Y_0 Z_0)$  hin gehende Richtung dieses Perpendikels mit den

positiven Theilen der Axen der  $x, y, z$  einschliesst, bezeichnen wir durch  $\theta_0, \omega_0, \bar{\omega}_0$ ; die als positiv oder absolut betrachtete Entfernung des Punktes  $(X_0 Y_0 Z_0)$  von dem Punkte  $(x_0 y_0 z_0)$ , also die Entfernung des Punktes  $(x_0 y_0 z_0)$  von der Axe, mag durch  $G_0$  bezeichnet werden; dann ist nach §. 1. 4):

$$3) \dots \dots \frac{X_0 - x_0}{\cos \theta_0} = \frac{Y_0 - y_0}{\cos \omega_0} = \frac{Z_0 - z_0}{\cos \bar{\omega}_0} = G_0.$$

Weil ferner der Punkt  $(X_0 Y_0 Z_0)$  in der durch die Gleichungen 1) charakterisirten Axe liegt, so ist nach §. 1. 4):

$$4) \dots \dots \frac{X_0 - a}{\cos \theta} = \frac{Y_0 - b}{\cos \omega} = \frac{Z_0 - c}{\cos \bar{\omega}} = G,$$

wo  $G$  die Entfernung des Punktes  $(X_0 Y_0 Z_0)$  von dem Punkte  $(abc)$  bezeichnet, insofern man diese Entfernung als positiv oder negativ betrachtet, jenachdem der Punkt  $(X_0 Y_0 Z_0)$  in der der beiden von dem Punkte  $(abc)$  ausgehenden Richtungen der Axe, welcher die Winkel  $\theta, \omega, \bar{\omega}$  entsprechen, oder in der dieser Richtung entgegengesetzten Richtung liegt.

Hiernach haben wir also die Gleichungen:

$$5) \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} X_0 = a + G \cos \theta = x_0 + G_0 \cos \theta_0, \\ Y_0 = b + G \cos \omega = y_0 + G_0 \cos \omega_0, \\ Z_0 = c + G \cos \bar{\omega} = z_0 + G_0 \cos \bar{\omega}_0; \end{array} \right.$$

also die Gleichungen:

$$6) \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} x_0 - a = G \cos \theta - G_0 \cos \theta_0, \\ y_0 - b = G \cos \omega - G_0 \cos \omega_0, \\ z_0 - c = G \cos \bar{\omega} - G_0 \cos \bar{\omega}_0; \end{array} \right.$$

aus denen sich, wenn man  $G$  und  $G_0$  eliminirt, die Gleichung:

7)

$$\left. \begin{array}{l} (x_0 - a)(\cos \omega \cos \bar{\omega}_0 - \cos \bar{\omega} \cos \omega_0) \\ + (y_0 - b)(\cos \bar{\omega} \cos \theta_0 - \cos \theta \cos \bar{\omega}_0) \\ + (z_0 - c)(\cos \theta \cos \omega_0 - \cos \omega \cos \theta_0) \end{array} \right\} = 0$$

oder:

8)

$$\left. \begin{aligned} & \{ (y_0 - b) \cos \bar{\omega} - (z_0 - c) \cos \omega \} \cos \theta_0 \\ & + \{ (z_0 - c) \cos \theta - (x_0 - a) \cos \bar{\omega} \} \cos \omega_0 \\ & + \{ (x_0 - a) \cos \omega - (y_0 - b) \cos \theta \} \cos \bar{\omega}_0 \end{aligned} \right\} = 0$$

ergibt.

Wegen der Perpendicularität der beiden so eben betrachteten, durch die Gleichungen:

$$\frac{x-a}{\cos \theta} = \frac{y-b}{\cos \omega} = \frac{z-c}{\cos \bar{\omega}} \quad \text{und} \quad \frac{x-x_0}{\cos \theta_0} = \frac{y-y_0}{\cos \omega_0} = \frac{z-z_0}{\cos \bar{\omega}_0}$$

charakterisirten Geraden hat man aber ferner die Gleichung:

$$9) \quad \cos \theta \cos \theta_0 + \cos \omega \cos \omega_0 + \cos \bar{\omega} \cos \bar{\omega}_0 = 0,$$

und erhält nun aus den Gleichungen 8) und 9), wenn  $G_0'$  einen gewissen Factor bezeichnet, auf bekannte Weise leicht:

$$\cos \theta_0 = G_0' \left\{ \begin{array}{l} \cos \omega [(x_0 - a) \cos \omega - (y_0 - b) \cos \theta] \\ - \cos \bar{\omega} [(z_0 - c) \cos \theta - (x_0 - a) \cos \bar{\omega}] \end{array} \right\},$$

$$\cos \omega_0 = G_0' \left\{ \begin{array}{l} \cos \bar{\omega} [(y_0 - b) \cos \bar{\omega} - (z_0 - c) \cos \omega] \\ - \cos \theta [(x_0 - a) \cos \omega - (y_0 - b) \cos \theta] \end{array} \right\},$$

$$\cos \bar{\omega}_0 = G_0' \left\{ \begin{array}{l} \cos \theta [(z_0 - c) \cos \theta - (x_0 - a) \cos \bar{\omega}] \\ - \cos \omega [(y_0 - b) \cos \bar{\omega} - (z_0 - c) \cos \omega] \end{array} \right\};$$

oder, wie man sogleich übersieht:

10)

$$\cos \theta_0 = G_0' \{ x_0 - a - [(x_0 - a) \cos \theta + (y_0 - b) \cos \omega + (z_0 - c) \cos \bar{\omega}] \cos \theta \},$$

$$\cos \omega_0 = G_0' \{ y_0 - b - [(x_0 - a) \cos \theta + (y_0 - b) \cos \omega + (z_0 - c) \cos \bar{\omega}] \cos \omega \},$$

$$\cos \bar{\omega}_0 = G_0' \{ z_0 - c - [(x_0 - a) \cos \theta + (y_0 - b) \cos \omega + (z_0 - c) \cos \bar{\omega}] \cos \bar{\omega} \};$$

woraus sich ferner leicht die Gleichung:

11)

$$\begin{aligned} & \{ (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 + (z_0 - c)^2 \\ & - [(x_0 - a) \cos \theta + (y_0 - b) \cos \omega + (z_0 - c) \cos \bar{\omega}]^2 \} = 1 \end{aligned}$$

gibt.



Aus den Gleichungen 6), nämlich aus den Gleichungen:

$$x_0 - a = G \cos \theta - G_0 \cos \theta_0,$$

$$y_0 - b = G \cos \omega - G_0 \cos \omega_0,$$

$$z_0 - c = G \cos \bar{\omega} - G_0 \cos \bar{\omega}_0,$$

erhält man ferner leicht:

$$\begin{aligned} & (x_0 - a) \cos \theta + (y_0 - b) \cos \omega + (z_0 - c) \cos \bar{\omega} \\ &= G - G_0 (\cos \theta \cos \theta_0 + \cos \omega \cos \omega_0 + \cos \bar{\omega} \cos \bar{\omega}_0), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (x_0 - a) \cos \theta_0 + (y_0 - b) \cos \omega_0 + (z_0 - c) \cos \bar{\omega}_0 \\ &= G (\cos \theta \cos \theta_0 + \cos \omega \cos \omega_0 + \cos \bar{\omega} \cos \bar{\omega}_0) - G_0; \end{aligned}$$

also nach 9):

12)

$$(x_0 - a) \cos \theta + (y_0 - b) \cos \omega + (z_0 - c) \cos \bar{\omega} = G,$$

$$(x_0 - a) \cos \theta_0 + (y_0 - b) \cos \omega_0 + (z_0 - c) \cos \bar{\omega}_0 = -G_0.$$

Führt man in die letztere dieser beiden Gleichungen die Wer von  $\cos \theta_0$ ,  $\cos \omega_0$ ,  $\cos \bar{\omega}_0$  aus 10) ein, so erhält man:

$$\begin{aligned} & G_0' \{ (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 + (z_0 - c)^2 \\ & \quad - [(x_0 - a) \cos \theta + (y_0 - b) \cos \omega + (z_0 - c) \cos \bar{\omega}]^2 \} = -1 \end{aligned}$$

also:

$$\begin{aligned} & G_0'^2 \{ (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 + (z_0 - c)^2 \\ & \quad - [(x_0 - a) \cos \theta + (y_0 - b) \cos \omega + (z_0 - c) \cos \bar{\omega}]^2 \} = -G_0 \end{aligned}$$

und folglich nach 11):

$$13) \quad \dots \dots \dots G_0 G_0' = -1,$$

woraus sich, weil bekanntlich  $G_0$  eine positive Grösse ist, giebt, dass  $G_0'$  eine negative Grösse, und folglich nach 11):

14)

$$G_0' = - \frac{1}{\sqrt{\{ (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 + (z_0 - c)^2 - [(x_0 - a) \cos \theta + (y_0 - b) \cos \omega + (z_0 - c) \cos \bar{\omega}]^2 \}}}$$

ist.

Endlich ist nach 3):

$$X_0 - x_0 = G_0 \cos \theta_0,$$

$$Y_0 - y_0 = G_0 \cos \omega_0,$$

$$Z_0 - z_0 = G_0 \cos \bar{\omega}_0;$$

also nach 10):

$$\begin{aligned} & X_0 - x_0 \\ = & G_0 G_0' \{ x_0 - a - [(x_0 - a) \cos \theta + (y_0 - b) \cos \omega + (z_0 - c) \cos \bar{\omega}] \cos \theta \}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & Y_0 - y_0 \\ = & G_0 G_0' \{ y_0 - b - [(x_0 - a) \cos \theta + (y_0 - b) \cos \omega + (z_0 - c) \cos \bar{\omega}] \cos \omega \}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & Z_0 - z_0 \\ = & G_0 G_0' \{ z_0 - c - [(x_0 - a) \cos \theta + (y_0 - b) \cos \omega + (z_0 - c) \cos \bar{\omega}] \cos \bar{\omega} \}; \end{aligned}$$

also nach 13):

15)

$$X_0 = a + \{ (x_0 - a) \cos \theta + (y_0 - b) \cos \omega + (z_0 - c) \cos \bar{\omega} \} \cos \theta,$$

$$Y_0 = b + \{ (x_0 - a) \cos \theta + (y_0 - b) \cos \omega + (z_0 - c) \cos \bar{\omega} \} \cos \omega,$$

$$Z_0 = c + \{ (x_0 - a) \cos \theta + (y_0 - b) \cos \omega + (z_0 - c) \cos \bar{\omega} \} \cos \bar{\omega}.$$

Durch den Punkt  $(x_0 y_0 z_0)$  legen wir jetzt eine auf der Axe senkrecht stehende Ebene, deren Gleichung:

$$A_0(x - x_0) + B_0(y - y_0) + C_0(z - z_0) = 0$$

sein mag; dann ist nach den Lehren der analytischen Geometrie:

$$\frac{A_0}{\cos \theta} = \frac{B_0}{\cos \omega} = \frac{C_0}{\cos \bar{\omega}},$$

und die Gleichung der in Rede stehenden Ebene ist folglich:

$$16) \dots (x - x_0) \cos \theta + (y - y_0) \cos \omega + (z - z_0) \cos \bar{\omega} = 0.$$

Ferner legen wir durch den Punkt  $(x_0 y_0 z_0)$  eine in dieser Ebene liegende Gerade, welche auf der von dem Punkte  $(x_0 y_0 z_0)$  senkrecht gegen die Axe gezogenen Geraden senkrecht steht, und schneiden auf dieser Senkrechten von dem Punkte  $(x_0 y_0 z_0)$  ein beliebiges Stück  $v_0$  ab, dessen Endpunkt durch die Coordinaten  $X_0, Y_0, Z_0$  bestimmt sein mag. Bezeichnen wir die nicht übersteigenden Winkel, welche dieses als von dem Punkte  $(x_0 y_0 z_0)$  ausgehend gedachte Stück  $v_0$  mit den positiven

Theilen der Axen der  $x, y, z$  einschliesst, durch  $\lambda_0, \mu_0$ , so ist:

$$17) \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} \bar{x}_0 = x_0 + v_0 \cos \lambda_0, \\ \bar{y}_0 = y_0 + v_0 \cos \mu_0, \\ \bar{z}_0 = z_0 + v_0 \cos \nu_0; \end{array} \right.$$

und die Gleichungen des in Rede stehenden Perpendikels sind

$$18) \dots \dots \dots \frac{x-x_0}{\cos \lambda_0} = \frac{y-y_0}{\cos \mu_0} = \frac{z-z_0}{\cos \nu_0}.$$

Weil dieses Perpendikel in der durch die Gleichung 16) charakterisirten Ebene liegen soll, und auf der von dem Punkt  $(x_0, y_0, z_0)$  senkrecht gegen die Axe gezogenen Geraden, die Gleichungen

$$\frac{x-x_0}{\cos \theta_0} = \frac{y-y_0}{\cos \omega_0} = \frac{z-z_0}{\cos \bar{\omega}_0}$$

sind, senkrecht steht; so ist:

$$\cos \theta \cos \lambda_0 + \cos \omega \cos \mu_0 + \cos \bar{\omega} \cos \nu_0 = 0,$$

$$\cos \theta_0 \cos \lambda_0 + \cos \omega_0 \cos \mu_0 + \cos \bar{\omega}_0 \cos \nu_0 = 0;$$

also, wenn  $G_0''$  einen gewissen Factor bezeichnet:

$$\cos \lambda_0 = G_0'' (\cos \omega \cos \bar{\omega}_0 - \cos \bar{\omega} \cos \omega_0),$$

$$\cos \mu_0 = G_0'' (\cos \bar{\omega} \cos \theta_0 - \cos \theta \cos \bar{\omega}_0),$$

$$\cos \nu_0 = G_0'' (\cos \theta \cos \omega_0 - \cos \omega \cos \theta_0);$$

folglich nach 10) offenbar:

19)

$$\cos \lambda_0 = G_0' G_0'' \{ (z_0 - c) \cos \omega - (y_0 - b) \cos \bar{\omega} \},$$

$$\cos \mu_0 = G_0' G_0'' \{ (x_0 - a) \cos \bar{\omega} - (z_0 - c) \cos \theta \},$$

$$\cos \nu_0 = G_0' G_0'' \{ (y_0 - b) \cos \theta - (x_0 - a) \cos \omega \};$$

woraus sich sogleich:

$$G_0'^2 G_0''^2 \{ (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 + (z_0 - c)^2 - [(x_0 - a) \cos \theta + (y_0 - b) \cos \omega + (z_0 - c) \cos \bar{\omega}]^2 \} =$$

also nach 11):



woraus sich, in Verbindung mit den oben in zweiter Linie stehenden Gleichungen, leicht die folgenden Formeln ergeben:

$$\begin{aligned} & X_0 - x_0 \\ &= \{ (\bar{x}_0 - x_0) \cos \alpha_0 + (\bar{y}_0 - y_0) \cos \beta_0 + (\bar{z}_0 - z_0) \cos \gamma_0 \} \cos \alpha_0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & Y_0 - y_0 \\ &= \{ (\bar{x}_0 - x_0) \cos \alpha_0 + (\bar{y}_0 - y_0) \cos \beta_0 + (\bar{z}_0 - z_0) \cos \gamma_0 \} \cos \beta_0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & Z_0 - z_0 \\ &= \{ (\bar{x}_0 - x_0) \cos \alpha_0 + (\bar{y}_0 - y_0) \cos \beta_0 + (\bar{z}_0 - z_0) \cos \gamma_0 \} \cos \gamma_0; \end{aligned}$$

folglich, weil nach 22) offenbar:

$$\begin{aligned} & (\bar{x}_0 - x_0) \cos \alpha_0 + (\bar{y}_0 - y_0) \cos \beta_0 + (\bar{z}_0 - z_0) \cos \gamma_0 \\ &= \pm G_0' v_0 \left\{ \begin{aligned} & [ (z_0 - c) \cos \omega - (y_0 - b) \cos \bar{\omega} ] \cos \alpha_0 \\ & + [ (x_0 - a) \cos \bar{\omega} - (z_0 - c) \cos \theta ] \cos \beta_0 \\ & + [ (y_0 - b) \cos \theta - (x_0 - a) \cos \omega ] \cos \gamma_0 \end{aligned} \right\} \\ &= \pm G_0' v_0 \left\{ \begin{aligned} & (x_0 - a) (\cos \beta_0 \cos \bar{\omega} - \cos \gamma_0 \cos \omega) \\ & + (y_0 - b) (\cos \gamma_0 \cos \theta - \cos \alpha_0 \cos \bar{\omega}) \\ & + (z_0 - c) (\cos \alpha_0 \cos \omega - \cos \beta_0 \cos \theta) \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

ist:

23)

$$X_0 - x_0 = \pm G_0' v_0 \left\{ \begin{aligned} & (x_0 - a) (\cos \beta_0 \cos \bar{\omega} - \cos \gamma_0 \cos \omega) \\ & + (y_0 - b) (\cos \gamma_0 \cos \theta - \cos \alpha_0 \cos \bar{\omega}) \\ & + (z_0 - c) (\cos \alpha_0 \cos \omega - \cos \beta_0 \cos \theta) \end{aligned} \right\} \cos \alpha_0,$$

$$Y_0 - y_0 = \pm G_0' v_0 \left\{ \begin{aligned} & (x_0 - a) (\cos \beta_0 \cos \bar{\omega} - \cos \gamma_0 \cos \omega) \\ & + (y_0 - b) (\cos \gamma_0 \cos \theta - \cos \alpha_0 \cos \bar{\omega}) \\ & + (z_0 - c) (\cos \alpha_0 \cos \omega - \cos \beta_0 \cos \theta) \end{aligned} \right\} \cos \beta_0,$$

$$Z_0 - z_0 = \pm G_0' v_0 \left\{ \begin{aligned} & (x_0 - a) (\cos \beta_0 \cos \bar{\omega} - \cos \gamma_0 \cos \omega) \\ & + (y_0 - b) (\cos \gamma_0 \cos \theta - \cos \alpha_0 \cos \bar{\omega}) \\ & + (z_0 - c) (\cos \alpha_0 \cos \omega - \cos \beta_0 \cos \theta) \end{aligned} \right\} \cos \gamma_0.$$

Bezeichnen wir nun die Projection von  $v_0$  auf der Richtungs-  
linie der Kraft  $P_0$ , indem wir diese Projection als positiv oder



verschiedenen Seiten oder Richtungen hin genommen werden können. Deshalb wollen wir jetzt festsetzen, dass die beiden Perpendikel  $v_0$  und  $v_1$  immer so genommen werden sollen, dass sie, wenn man sie als Kräfte betrachtete, das System, an welchem alle gegebenen Kräfte wirken, um die angenommene Axe als eine feste Drehungsaxe gedacht, nach einer und derselben Seite oder Richtung hin drehen oder zu drehen streben würden. Unter dieser Voraussetzung müssen offenbar die durch die Winkel  $\theta_0, \omega_0, \bar{\omega}_0$  und  $\theta_1, \omega_1, \bar{\omega}_1$  bestimmten Richtungen und die durch die Winkel  $\lambda_0, \mu_0, \nu_0$  und  $\lambda_1, \mu_1, \nu_1$  bestimmten Richtungen unter gleichen,  $180^\circ$  nicht übersteigenden Winkeln gegen einander geneigt sein, was durch eine ganz einfache geometrische Betrachtung auf der Stelle erhellet, so dass man also unter der gemachten Voraussetzung die Gleichung:

$$\begin{aligned} & \cos \theta_0 \cos \theta_1 + \cos \omega_0 \cos \omega_1 + \cos \bar{\omega}_0 \cos \bar{\omega}_1 \\ &= \cos \lambda_0 \cos \lambda_1 + \cos \mu_0 \cos \mu_1 + \cos \nu_0 \cos \nu_1 \end{aligned}$$

hat. Nach 10) ist nun:

$$\begin{aligned} \cos \theta_0 &= G_0' \{ x_0 - a - [(x_0 - a) \cos \theta + (y_0 - b) \cos \omega + (z_0 - c) \cos \bar{\omega}] \cos \theta \} \\ \cos \omega_0 &= G_0' \{ y_0 - b - [(x_0 - a) \cos \theta + (y_0 - b) \cos \omega + (z_0 - c) \cos \bar{\omega}] \cos \omega \} \\ \cos \bar{\omega}_0 &= G_0' \{ z_0 - c - [(x_0 - a) \cos \theta + (y_0 - b) \cos \omega + (z_0 - c) \cos \bar{\omega}] \cos \bar{\omega} \} \end{aligned}$$

und analog:

$$\begin{aligned} \cos \theta_1 &= G_1' \{ x_1 - a - [(x_1 - a) \cos \theta + (y_1 - b) \cos \omega + (z_1 - c) \cos \bar{\omega}] \cos \theta \} \\ \cos \omega_1 &= G_1' \{ y_1 - b - [(x_1 - a) \cos \theta + (y_1 - b) \cos \omega + (z_1 - c) \cos \bar{\omega}] \cos \omega \} \\ \cos \bar{\omega}_1 &= G_1' \{ z_1 - c - [(x_1 - a) \cos \theta + (y_1 - b) \cos \omega + (z_1 - c) \cos \bar{\omega}] \cos \bar{\omega} \} \end{aligned}$$

also, wie man sogleich übersieht:

$$\begin{aligned} & \cos \theta_0 \cos \theta_1 + \cos \omega_0 \cos \omega_1 + \cos \bar{\omega}_0 \cos \bar{\omega}_1 \\ &= G_0' G_1' \left\{ \begin{aligned} & (x_0 - a)(x_1 - a) + (y_0 - b)(y_1 - b) + (z_0 - c)(z_1 - c) \\ & - [(x_0 - a) \cos \theta + (y_0 - b) \cos \omega + (z_0 - c) \cos \bar{\omega}] \\ & \quad \times [(x_1 - a) \cos \theta + (y_1 - b) \cos \omega + (z_1 - c) \cos \bar{\omega}] \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

Ferner ist nach 21):

$$\cos \lambda_0 = \pm G_0' \{ (z_0 - c) \cos \omega - (y_0 - b) \cos \bar{\omega} \},$$

$$\cos \mu_0 = \pm G_0' \{ (x_0 - a) \cos \bar{\omega} - (z_0 - c) \cos \theta \},$$

$$\cos \nu_0 = \pm G_0' \{ (y_0 - b) \cos \theta - (x_0 - a) \cos \omega \}$$

analog:

$$\cos \lambda_1 = \pm G_1' \{ (z_1 - c) \cos \omega - (y_1 - b) \cos \bar{\omega} \},$$

$$\cos \mu_1 = \pm G_1' \{ (x_1 - a) \cos \bar{\omega} - (z_1 - c) \cos \theta \},$$

$$\cos \nu_1 = \pm G_1' \{ (y_1 - b) \cos \theta - (x_1 - a) \cos \omega \}.$$

ist aber, wie man durch einfache Multiplication findet:

$$\begin{aligned} & \{ (x_0 - a) \cos \bar{\omega} - (z_0 - c) \cos \theta \} \{ (x_1 - a) \cos \bar{\omega} - (z_1 - c) \cos \theta \} \\ & \{ (y_0 - b) \cos \theta - (x_0 - a) \cos \omega \} \{ (y_1 - b) \cos \theta - (x_1 - a) \cos \omega \} \\ & \{ (z_0 - c) \cos \omega - (y_0 - b) \cos \bar{\omega} \} \{ (z_1 - c) \cos \omega - (y_1 - b) \cos \bar{\omega} \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= (x_0 - a)(x_1 - a)(\cos \omega^2 + \cos \bar{\omega}^2) \\ & \quad + (y_0 - b)(y_1 - b)(\cos \bar{\omega}^2 + \cos \theta^2) \\ & \quad + (z_0 - c)(z_1 - c)(\cos \theta^2 + \cos \omega^2) \\ & \quad - (x_0 - a)(y_1 - b) \cos \theta \cos \omega \\ & \quad - (x_0 - a)(z_1 - c) \cos \theta \cos \bar{\omega} \\ & \quad - (y_0 - b)(z_1 - c) \cos \omega \cos \bar{\omega} \\ & \quad - (y_0 - b)(x_1 - a) \cos \omega \cos \theta \\ & \quad - (z_0 - c)(x_1 - a) \cos \bar{\omega} \cos \theta \\ & \quad - (z_0 - c)(y_1 - b) \cos \bar{\omega} \cos \omega \\ &= (x_0 - a)(x_1 - a)(\cos \theta^2 + \cos \omega^2 + \cos \bar{\omega}^2) \\ & \quad + (y_0 - b)(y_1 - b)(\cos \theta^2 + \cos \omega^2 + \cos \bar{\omega}^2) \\ & \quad + (z_0 - c)(z_1 - c)(\cos \theta^2 + \cos \omega^2 + \cos \bar{\omega}^2) \\ & \quad - (x_0 - a)(x_1 - a) \cos \theta \cos \theta \\ & \quad - (x_0 - a)(y_1 - b) \cos \theta \cos \omega \\ & \quad - (x_0 - a)(z_1 - c) \cos \theta \cos \bar{\omega} \\ & \quad - (y_0 - b)(x_1 - a) \cos \omega \cos \theta \\ & \quad - (y_0 - b)(y_1 - b) \cos \omega \cos \omega \\ & \quad - (y_0 - b)(z_1 - c) \cos \omega \cos \bar{\omega} \\ & \quad - (z_0 - c)(x_1 - a) \cos \bar{\omega} \cos \theta \\ & \quad - (z_0 - c)(y_1 - b) \cos \bar{\omega} \cos \omega \\ & \quad - (z_0 - c)(z_1 - c) \cos \bar{\omega} \cos \bar{\omega} \end{aligned}$$





streben streben würden, im Obigen überall die oberen und unteren Zeichen auf einander bezogen werden müssen, und dass man also namentlich auch nach 24) mit Beziehung der oberen und unteren Zeichen auf einander setzen muss:

25)

$$p_0 = \mp \left\{ \begin{array}{l} (x_0 - a)(\cos \beta_0 \cos \bar{\omega} - \cos \gamma_0 \cos \omega) \\ + (y_0 - b)(\cos \gamma_0 \cos \theta - \cos \alpha_0 \cos \bar{\omega}) \\ + (z_0 - c)(\cos \alpha_0 \cos \omega - \cos \beta_0 \cos \theta) \end{array} \right\} \cdot \frac{v_0}{G_0},$$

$$p_1 = \mp \left\{ \begin{array}{l} (x_1 - a)(\cos \beta_1 \cos \bar{\omega} - \cos \gamma_1 \cos \omega) \\ + (y_1 - b)(\cos \gamma_1 \cos \theta - \cos \alpha_1 \cos \bar{\omega}) \\ + (z_1 - c)(\cos \alpha_1 \cos \omega - \cos \beta_1 \cos \theta) \end{array} \right\} \cdot \frac{v_1}{G_1}.$$

Für das ganze System unserer Kräfte

$$P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, \dots$$

haben wir daher die folgenden Gleichungen:

26)

$$p_0 = \mp \left\{ \begin{array}{l} (x_0 - a)(\cos \beta_0 \cos \bar{\omega} - \cos \gamma_0 \cos \omega) \\ + (y_0 - b)(\cos \gamma_0 \cos \theta - \cos \alpha_0 \cos \bar{\omega}) \\ + (z_0 - c)(\cos \alpha_0 \cos \omega - \cos \beta_0 \cos \theta) \end{array} \right\} \cdot \frac{v_0}{G_0},$$

$$p_1 = \mp \left\{ \begin{array}{l} (x_1 - a)(\cos \beta_1 \cos \bar{\omega} - \cos \gamma_1 \cos \omega) \\ + (y_1 - b)(\cos \gamma_1 \cos \theta - \cos \alpha_1 \cos \bar{\omega}) \\ + (z_1 - c)(\cos \alpha_1 \cos \omega - \cos \beta_1 \cos \theta) \end{array} \right\} \cdot \frac{v_1}{G_1},$$

$$p_2 = \mp \left\{ \begin{array}{l} (x_2 - a)(\cos \beta_2 \cos \bar{\omega} - \cos \gamma_2 \cos \omega) \\ + (y_2 - b)(\cos \gamma_2 \cos \theta - \cos \alpha_2 \cos \bar{\omega}) \\ + (z_2 - c)(\cos \alpha_2 \cos \omega - \cos \beta_2 \cos \theta) \end{array} \right\} \cdot \frac{v_2}{G_2},$$

$$p_3 = \mp \left\{ \begin{array}{l} (x_3 - a)(\cos \beta_3 \cos \bar{\omega} - \cos \gamma_3 \cos \omega) \\ + (y_3 - b)(\cos \gamma_3 \cos \theta - \cos \alpha_3 \cos \bar{\omega}) \\ + (z_3 - c)(\cos \alpha_3 \cos \omega - \cos \beta_3 \cos \theta) \end{array} \right\} \cdot \frac{v_3}{G_3},$$

u. s. w.

in denen durchgehends die oberen und unteren Zeichen auf einander zu beziehen sind, wenn man sich nur stets an die aus dem Obigen bekannten Voraussetzungen hält.

Es ist nun:

$$\begin{aligned}
& P_0 \left\{ \begin{aligned} & (x_0 - a)(\cos \beta_0 \cos \bar{\omega} - \cos \gamma_0 \cos \omega) \\ & + (y_0 - b)(\cos \gamma_0 \cos \theta - \cos \alpha_0 \cos \bar{\omega}) \\ & + (z_0 - c)(\cos \alpha_0 \cos \omega - \cos \beta_0 \cos \theta) \end{aligned} \right\} \\
& + P_1 \left\{ \begin{aligned} & (x_1 - a)(\cos \beta_1 \cos \bar{\omega} - \cos \gamma_1 \cos \omega) \\ & + (y_1 - b)(\cos \gamma_1 \cos \theta - \cos \alpha_1 \cos \bar{\omega}) \\ & + (z_1 - c)(\cos \alpha_1 \cos \omega - \cos \beta_1 \cos \theta) \end{aligned} \right\} \\
& + P_2 \left\{ \begin{aligned} & (x_2 - a)(\cos \beta_2 \cos \bar{\omega} - \cos \gamma_2 \cos \omega) \\ & + (y_2 - b)(\cos \gamma_2 \cos \theta - \cos \alpha_2 \cos \bar{\omega}) \\ & + (z_2 - c)(\cos \alpha_2 \cos \omega - \cos \beta_2 \cos \theta) \end{aligned} \right\} \\
& + P_3 \left\{ \begin{aligned} & (x_3 - a)(\cos \beta_3 \cos \bar{\omega} - \cos \gamma_3 \cos \omega) \\ & + (y_3 - b)(\cos \gamma_3 \cos \theta - \cos \alpha_3 \cos \bar{\omega}) \\ & + (z_3 - c)(\cos \alpha_3 \cos \omega - \cos \beta_3 \cos \theta) \end{aligned} \right\}
\end{aligned}$$

u. s. w.

$$\begin{aligned}
& = P_0 \left\{ \begin{aligned} & x_0(\cos \beta_0 \cos \bar{\omega} - \cos \gamma_0 \cos \omega) \\ & + y_0(\cos \gamma_0 \cos \theta - \cos \alpha_0 \cos \bar{\omega}) \\ & + z_0(\cos \alpha_0 \cos \omega - \cos \beta_0 \cos \theta) \end{aligned} \right\} \\
& + P_1 \left\{ \begin{aligned} & x_1(\cos \beta_1 \cos \bar{\omega} - \cos \gamma_1 \cos \omega) \\ & + y_1(\cos \gamma_1 \cos \theta - \cos \alpha_1 \cos \bar{\omega}) \\ & + z_1(\cos \alpha_1 \cos \omega - \cos \beta_1 \cos \theta) \end{aligned} \right\} \\
& + P_2 \left\{ \begin{aligned} & x_2(\cos \beta_2 \cos \bar{\omega} - \cos \gamma_2 \cos \omega) \\ & + y_2(\cos \gamma_2 \cos \theta - \cos \alpha_2 \cos \bar{\omega}) \\ & + z_2(\cos \alpha_2 \cos \omega - \cos \beta_2 \cos \theta) \end{aligned} \right\} \\
& + P_3 \left\{ \begin{aligned} & x_3(\cos \beta_3 \cos \bar{\omega} - \cos \gamma_3 \cos \omega) \\ & + y_3(\cos \gamma_3 \cos \theta - \cos \alpha_3 \cos \bar{\omega}) \\ & + z_3(\cos \alpha_3 \cos \omega - \cos \beta_3 \cos \theta) \end{aligned} \right\}
\end{aligned}$$

u. s. w.

$$\begin{aligned}
& - P_0 \left\{ \begin{aligned} & a(\cos \beta_0 \cos \bar{\omega} - \cos \gamma_0 \cos \omega) \\ & + b(\cos \gamma_0 \cos \theta - \cos \alpha_0 \cos \bar{\omega}) \\ & + c(\cos \alpha_0 \cos \omega - \cos \beta_0 \cos \theta) \end{aligned} \right\} \\
& - P_1 \left\{ \begin{aligned} & a(\cos \beta_1 \cos \bar{\omega} - \cos \gamma_1 \cos \omega) \\ & + b(\cos \gamma_1 \cos \theta - \cos \alpha_1 \cos \bar{\omega}) \\ & + c(\cos \alpha_1 \cos \omega - \cos \beta_1 \cos \theta) \end{aligned} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -P_2 \left\{ \begin{array}{l} a(\cos \beta_2 \cos \bar{\omega} - \cos \gamma_2 \cos \omega) \\ + b(\cos \gamma_2 \cos \theta - \cos \alpha_2 \cos \bar{\omega}) \\ + c(\cos \alpha_2 \cos \omega - \cos \beta_2 \cos \theta) \end{array} \right\} \\
& -P_3 \left\{ \begin{array}{l} a(\cos \beta_3 \cos \bar{\omega} - \cos \gamma_3 \cos \omega) \\ + b(\cos \gamma_3 \cos \theta - \cos \alpha_3 \cos \bar{\omega}) \\ + c(\cos \alpha_3 \cos \omega - \cos \beta_3 \cos \theta) \end{array} \right\}
\end{aligned}$$

u. s. w.

$$\begin{aligned}
= & (b \cos \bar{\omega} - c \cos \omega)(P_0 \cos \alpha_0 + P_1 \cos \alpha_1 + P_2 \cos \alpha_2 + P_3 \cos \alpha_3 + \dots) \\
& + (c \cos \theta - a \cos \bar{\omega})(P_0 \cos \beta_0 + P_1 \cos \beta_1 + P_2 \cos \beta_2 + P_3 \cos \beta_3 + \dots) \\
& + (a \cos \omega - b \cos \theta)(P_0 \cos \gamma_0 + P_1 \cos \gamma_1 + P_2 \cos \gamma_2 + P_3 \cos \gamma_3 + \dots)
\end{aligned}$$

$$+ \cos \bar{\omega} \left\{ \begin{array}{l} P_0(x_0 \cos \beta_0 - y_0 \cos \alpha_0) \\ + P_1(x_1 \cos \beta_1 - y_1 \cos \alpha_1) \\ + P_2(x_2 \cos \beta_2 - y_2 \cos \alpha_2) \\ + P_3(x_3 \cos \beta_3 - y_3 \cos \alpha_3) \\ \text{u. s. w.} \end{array} \right\}$$

$$+ \cos \theta \left\{ \begin{array}{l} P_0(y_0 \cos \gamma_0 - z_0 \cos \beta_0) \\ + P_1(y_1 \cos \gamma_1 - z_1 \cos \beta_1) \\ + P_2(y_2 \cos \gamma_2 - z_2 \cos \beta_2) \\ + P_3(y_3 \cos \gamma_3 - z_3 \cos \beta_3) \\ \text{u. s. w.} \end{array} \right\}$$

$$+ \cos \omega \left\{ \begin{array}{l} P_0(z_0 \cos \alpha_0 - x_0 \cos \gamma_0) \\ + P_1(z_1 \cos \alpha_1 - x_1 \cos \gamma_1) \\ + P_2(z_2 \cos \alpha_2 - x_2 \cos \gamma_2) \\ + P_3(z_3 \cos \alpha_3 - x_3 \cos \gamma_3) \\ \text{u. s. w.} \end{array} \right\},$$

d in abkürzender Bezeichnung haben wir also die folgende eichung:

27)

$$\begin{aligned}
& \Sigma P \left\{ \begin{aligned} & (x-a)(\cos \beta \cos \bar{\omega} - \cos \gamma \cos \omega) \\ & + (y-b)(\cos \gamma \cos \theta - \cos \alpha \cos \bar{\omega}) \\ & + (z-c)(\cos \alpha \cos \omega - \cos \beta \cos \theta) \end{aligned} \right\} \\
& = (b \cos \bar{\omega} - c \cos \omega) \Sigma P \cos \alpha \\
& \quad + (c \cos \theta - a \cos \bar{\omega}) \Sigma P \cos \beta \\
& \quad + (a \cos \omega - b \cos \theta) \Sigma P \cos \gamma \\
& \quad + \cos \bar{\omega} \Sigma P (x \cos \beta - y \cos \alpha) \\
& \quad + \cos \theta \Sigma P (y \cos \gamma - z \cos \beta) \\
& \quad + \cos \omega \Sigma P (z \cos \alpha - x \cos \gamma).
\end{aligned}$$

Unter der Voraussetzung, dass die Kräfte

$$P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, \dots$$

unter einander im Gleichgewichte sind, ist nach §. 6.

$$\Sigma P \cos \alpha = 0, \quad \Sigma P \cos \beta = 0, \quad \Sigma P \cos \gamma = 0;$$

$$\Sigma P (x \cos \beta - y \cos \alpha) = 0,$$

$$\Sigma P (y \cos \gamma - z \cos \beta) = 0,$$

$$\Sigma P (z \cos \alpha - x \cos \gamma) = 0;$$

also nach 27), unabhängig von besonderen Werthen von  $a, b, c$  und  $\theta, \omega, \bar{\omega}$ , folglich für jede Axe:

$$\Sigma P \left\{ \begin{aligned} & (x-a)(\cos \beta \cos \bar{\omega} - \cos \gamma \cos \omega) \\ & + (y-b)(\cos \gamma \cos \theta - \cos \alpha \cos \bar{\omega}) \\ & + (z-c)(\cos \alpha \cos \omega - \cos \beta \cos \theta) \end{aligned} \right\} = 0.$$

Es fragt sich nun, ob sich dies auch umkehren lässt, ob man nämlich behaupten kann, dass, wenn für jede Axe

$$\Sigma P \left\{ \begin{aligned} & (x-a)(\cos \beta \cos \bar{\omega} - \cos \gamma \cos \omega) \\ & + (y-b)(\cos \gamma \cos \theta - \cos \alpha \cos \bar{\omega}) \\ & + (z-c)(\cos \alpha \cos \omega - \cos \beta \cos \theta) \end{aligned} \right\} = 0$$

ist, die Kräfte

$$P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, \dots$$

unter einander im Gleichgewichte sein müssen.

Weil vorausgesetzt wird, dass die vorstehende Gleichung, also nach 27) die Gleichung:

$$\left. \begin{aligned} & (b \cos \bar{\omega} - c \cos \omega) \Sigma P \cos \alpha \\ & + (c \cos \theta - a \cos \bar{\omega}) \Sigma P \cos \beta \\ & + (a \cos \omega - b \cos \theta) \Sigma P \cos \gamma \\ & + \cos \bar{\omega} \Sigma P (x \cos \beta - y \cos \alpha) \\ & + \cos \theta \Sigma P (y \cos \gamma - z \cos \beta) \\ & + \cos \omega \Sigma P (z \cos \alpha - x \cos \gamma) \end{aligned} \right\} = 0,$$

jede Axe oder unabhängig von besonderen Werthen von  $a$ ,  $b$  und  $\theta$ ,  $\omega$ ,  $\bar{\omega}$  gilt; so wird diese Gleichung auch gelten, wenn  $a = 0$ ,  $b = 0$ ,  $c = 0$  setzt, was nach dem Obigen unmittelbar zu der unabhängig von besonderen Werthen von  $\theta$ ,  $\omega$ ,  $\bar{\omega}$  gel-  
 en Gleichung:

$$\left. \begin{aligned} & \cos \bar{\omega} \Sigma P (x \cos \beta - y \cos \alpha) \\ & + \cos \theta \Sigma P (y \cos \gamma - z \cos \beta) \\ & + \cos \omega \Sigma P (z \cos \alpha - x \cos \gamma) \end{aligned} \right\} = 0$$

t. Setzt man nun in dieser Gleichung nach der Reihe:

$$\cos \theta = 0, \quad \cos \omega = 0, \quad \cos \bar{\omega} = \pm 1;$$

$$\cos \theta = \pm 1, \quad \cos \omega = 0, \quad \cos \bar{\omega} = 0;$$

$$\cos \theta = 0, \quad \cos \omega = \pm 1, \quad \cos \bar{\omega} = 0;$$

verstattet ist, weil in allen diesen Fällen, wie erforderlich:

$$\cos \theta^2 + \cos \omega^2 + \cos \bar{\omega}^2 = 1$$

lässt man nämlich die Axe nach und nach mit der Axe der  $z$ ,  $y$  zusammenfallen oder diesen Axen parallel sein; so ergibt  
 aus der obigen Gleichung nach und nach:

$$\Sigma P (x \cos \beta - y \cos \alpha) = 0,$$

$$\Sigma P (y \cos \gamma - z \cos \beta) = 0,$$

$$\Sigma P (z \cos \alpha - x \cos \gamma) = 0;$$

dann ferner nach dem Obigen zu der unabhängig von be-  
 deren Werthen von  $a$ ,  $b$ ,  $c$  und  $\theta$ ,  $\omega$ ,  $\bar{\omega}$  geltenden Gleichung:

$$\left. \begin{aligned} & (b \cos \bar{\omega} - c \cos \omega) \Sigma P \cos \alpha \\ & + (c \cos \theta - a \cos \bar{\omega}) \Sigma P \cos \beta \\ & + (a \cos \omega - b \cos \theta) \Sigma P \cos \gamma \end{aligned} \right\} = 0$$

führt. Setzt man nun in dieser Gleichung, was offenbar verstat ist, nach der Reihe:

$$a = 0, \quad b = 0, \quad \cos \theta = 0;$$

$$b = 0, \quad c = 0, \quad \cos \omega = 0;$$

$$c = 0, \quad a = 0, \quad \cos \bar{\omega} = 0;$$

wo also beziehungsweise:

$$\cos \omega^2 + \cos \bar{\omega}^2 = 1,$$

$$\cos \bar{\omega}^2 + \cos \theta^2 = 1,$$

$$\cos \theta^2 + \cos \omega^2 = 1;$$

folglich, natürlich ohne Beziehung der oberen und unteren Zeichen auf einander:

$$\cos \omega = \pm \sin \bar{\omega},$$

$$\cos \bar{\omega} = \pm \sin \theta,$$

$$\cos \theta = \pm \sin \omega$$

ist, so erhalten wir die Gleichungen:

$$c \cos \omega \Sigma P \cos \alpha = 0,$$

$$a \cos \bar{\omega} \Sigma P \cos \beta = 0,$$

$$b \cos \theta \Sigma P \cos \gamma = 0$$

oder:

$$c \sin \bar{\omega} \Sigma P \cos \alpha = 0,$$

$$a \sin \theta \Sigma P \cos \beta = 0,$$

$$b \sin \omega \Sigma P \cos \gamma = 0;$$

welche beziehungsweise unabhängig von besonderen Werthen von  $c, \omega; a, \bar{\omega}; b, \theta$  oder  $c, \bar{\omega}; a, \theta; b, \omega$  gelten, was unmittelbar zu den Gleichungen:

$$\Sigma P \cos \alpha = 0, \quad \Sigma P \cos \beta = 0, \quad \Sigma P \cos \gamma = 0$$

führt. Hiernach ist also, wenn für alle Axen die Gleichung:

$$\Sigma P \left\{ \begin{aligned} &(x-a)(\cos \beta \cos \bar{\omega} - \cos \gamma \cos \omega) \\ &+ (y-b)(\cos \gamma \cos \theta - \cos \alpha \cos \bar{\omega}) \\ &+ (z-c)(\cos \alpha \cos \omega - \cos \beta \cos \theta) \end{aligned} \right\} = 0$$

Statt findet:

$$\Sigma P \cos \alpha = 0, \quad \Sigma P \cos \beta = 0, \quad \Sigma P \cos \gamma = 0;$$

$$\Sigma P(x \cos \beta - y \cos \alpha) = 0,$$

$$\Sigma P(y \cos \gamma - z \cos \beta) = 0,$$

$$\Sigma P(z \cos \alpha - x \cos \gamma) = 0;$$

und nach §. 6. sind also die Kräfte

$$P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, \dots$$

unter einander im Gleichgewichte.

Wir haben daher jetzt den folgenden allgemeinen Satz:

Die nothwendige Bedingung für das Gleichgewicht der Kräfte

$$P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, \dots$$

ist, dass die Gleichung:

$$\Sigma P \left\{ \begin{array}{l} (x-a)(\cos \beta \cos \bar{\omega} - \cos \gamma \cos \omega) \\ + (y-b)(\cos \gamma \cos \theta - \cos \alpha \cos \bar{\omega}) \\ + (z-c)(\cos \alpha \cos \omega - \cos \beta \cos \theta) \end{array} \right\} = 0$$

für alle Axen erfüllt ist.

Aus den Gleichungen 26) folgt offenbar, wenn man dieselben nach der Reihe mit

$$P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, \dots$$

multipliziert und dann summirt, die Gleichung:

$$\Sigma p P = \mp \Sigma \frac{v}{G} P \left\{ \begin{array}{l} (x-a)(\cos \beta \cos \bar{\omega} - \cos \gamma \cos \omega) \\ + (y-b)(\cos \gamma \cos \theta - \cos \alpha \cos \bar{\omega}) \\ + (z-c)(\cos \alpha \cos \omega - \cos \beta \cos \theta) \end{array} \right\} = 0,$$

Sodann aber die Größen

$$\frac{v_0}{G_0}, \quad \frac{v_1}{G_1}, \quad \frac{v_2}{G_2}, \quad \frac{v_3}{G_3}, \quad \frac{v_4}{G_4}, \quad \dots$$

alle unter einander gleich, und bezeichnen wir den gemein-





$$E_0 \sin W_0 = (x_0 - a)(\cos \beta_0 \cos \bar{\omega} - \cos \gamma_0 \cos \omega) \\ + (y_0 - b)(\cos \gamma_0 \cos \theta - \cos \alpha_0 \cos \bar{\omega}) \\ + (z_0 - c)(\cos \alpha_0 \cos \omega - \cos \beta_0 \cos \theta),$$

$$E_1 \sin W_1 = (x_1 - a)(\cos \beta_1 \cos \bar{\omega} - \cos \gamma_1 \cos \omega) \\ + (y_1 - b)(\cos \gamma_1 \cos \theta - \cos \alpha_1 \cos \bar{\omega}) \\ + (z_1 - c)(\cos \alpha_1 \cos \omega - \cos \beta_1 \cos \theta),$$

$$E_2 \sin W_2 = (x_2 - a)(\cos \beta_2 \cos \bar{\omega} - \cos \gamma_2 \cos \omega) \\ + (y_2 - b)(\cos \gamma_2 \cos \theta - \cos \alpha_2 \cos \bar{\omega}) \\ + (z_2 - c)(\cos \alpha_2 \cos \omega - \cos \beta_2 \cos \theta),$$

$$E_3 \sin W_3 = (x_3 - a)(\cos \beta_3 \cos \bar{\omega} - \cos \gamma_3 \cos \omega) \\ + (y_3 - b)(\cos \gamma_3 \cos \theta - \cos \alpha_3 \cos \bar{\omega}) \\ + (z_3 - c)(\cos \alpha_3 \cos \omega - \cos \beta_3 \cos \theta),$$

u. s. w.

und nach dem Obigen (S. 255.) können wir also offenbar auch den folgenden allgemeinen Satz aussprechen:

**Die notwendige Bedingung für das Gleichgewicht der Kräfte**

$$P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, \dots$$

ist, dass die Gleichung

$$\Sigma P E \sin W = 0$$

für alle Axen erfüllt ist.

Nach 26) haben

$$p_0, p_1, p_2, p_3, p_4, \dots$$

speciell mit

$$(x_0 - a)(\cos \beta_0 \cos \bar{\omega} - \cos \gamma_0 \cos \omega) \\ + (y_0 - b)(\cos \gamma_0 \cos \theta - \cos \alpha_0 \cos \bar{\omega}) \\ + (z_0 - c)(\cos \alpha_0 \cos \omega - \cos \beta_0 \cos \theta),$$

$$(x_1 - a)(\cos \beta_1 \cos \bar{\omega} - \cos \gamma_1 \cos \omega) \\ + (y_1 - b)(\cos \gamma_1 \cos \theta - \cos \alpha_1 \cos \bar{\omega}) \\ + (z_1 - c)(\cos \alpha_1 \cos \omega - \cos \beta_1 \cos \theta),$$

$$(x_2 - a)(\cos \beta_2 \cos \bar{\omega} - \cos \gamma_2 \cos \omega) \\ + (y_2 - b)(\cos \gamma_2 \cos \theta - \cos \alpha_2 \cos \bar{\omega}) \\ + (z_2 - c)(\cos \alpha_2 \cos \omega - \cos \beta_2 \cos \theta),$$

führt. Setzt man nun in dieser Gleichung, was offenbar verstat-  
ist, nach der Reihe:

$$a = 0, \quad b = 0, \quad \cos \theta = 0;$$

$$b = 0, \quad c = 0, \quad \cos \omega = 0;$$

$$c = 0, \quad a = 0, \quad \cos \bar{\omega} = 0;$$

wo also beziehungsweise:

$$\cos \omega^2 + \cos \bar{\omega}^2 = 1,$$

$$\cos \bar{\omega}^2 + \cos \theta^2 = 1,$$

$$\cos \theta^2 + \cos \omega^2 = 1;$$

folglich, natürlich ohne Beziehung der oberen und unteren Zeichen  
auf einander:

$$\cos \omega = \pm \sin \bar{\omega},$$

$$\cos \bar{\omega} = \pm \sin \theta,$$

$$\cos \theta = \pm \sin \omega$$

ist, so erhalten wir die Gleichungen:

$$c \cos \omega \Sigma P \cos \alpha = 0,$$

$$a \cos \bar{\omega} \Sigma P \cos \beta = 0,$$

$$b \cos \theta \Sigma P \cos \gamma = 0$$

oder:

$$c \sin \bar{\omega} \Sigma P \cos \alpha = 0,$$

$$a \sin \theta \Sigma P \cos \beta = 0,$$

$$b \sin \omega \Sigma P \cos \gamma = 0;$$

welche beziehungsweise unabhängig von besonderen Werthen von  
 $c, \omega; a, \bar{\omega}; b, \theta$  oder  $c, \bar{\omega}; a, \theta; b, \omega$  gelten, was unmittelbar  
zu den Gleichungen:

$$\Sigma P \cos \alpha = 0, \quad \Sigma P \cos \beta = 0, \quad \Sigma P \cos \gamma = 0$$

führt. Hiernach ist also, wenn für alle Axen die Gleichung:

$$\Sigma P \left\{ \begin{aligned} &(x-a)(\cos \beta \cos \bar{\omega} - \cos \gamma \cos \omega) \\ &+ (y-b)(\cos \gamma \cos \theta - \cos \alpha \cos \bar{\omega}) \\ &+ (z-c)(\cos \alpha \cos \omega - \cos \beta \cos \theta) \end{aligned} \right\} = 0$$

Statt findet:

$$\Sigma P \cos \alpha = 0, \quad \Sigma P \cos \beta = 0, \quad \Sigma P \cos \gamma = 0;$$

$$\Sigma P (x \cos \beta - y \cos \alpha) = 0,$$

$$\Sigma P (y \cos \gamma - z \cos \beta) = 0,$$

$$\Sigma P (z \cos \alpha - x \cos \gamma) = 0;$$

und nach §. 6. sind also die Kräfte

$$P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, \dots$$

unter einander im Gleichgewichte.

Wir haben daher jetzt den folgenden allgemeinen Satz:

Die nothwendige Bedingung für das Gleichgewicht der Kräfte

$$P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, \dots$$

ist, dass die Gleichung:

$$\Sigma P \left\{ \begin{array}{l} (x-a)(\cos \beta \cos \bar{\omega} - \cos \gamma \cos \omega) \\ + (y-b)(\cos \gamma \cos \theta - \cos \alpha \cos \bar{\omega}) \\ + (z-c)(\cos \alpha \cos \omega - \cos \beta \cos \theta) \end{array} \right\} = 0$$

für alle Axen erfüllt ist.

Aus den Gleichungen 26) folgt offenbar, wenn man dieselben nach der Reihe mit

$$P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, \dots$$

multipliziert und dann summirt, die Gleichung:

$$\Sigma p P = \mp \Sigma \frac{v}{G} P \left\{ \begin{array}{l} (x-a)(\cos \beta \cos \bar{\omega} - \cos \gamma \cos \omega) \\ + (y-b)(\cos \gamma \cos \theta - \cos \alpha \cos \bar{\omega}) \\ + (z-c)(\cos \alpha \cos \omega - \cos \beta \cos \theta) \end{array} \right\} = 0,$$

Sind nun aber die Grössen

$$\frac{v_0}{G_0}, \quad \frac{v_1}{G_1}, \quad \frac{v_2}{G_2}, \quad \frac{v_3}{G_3}, \quad \frac{v_4}{G_4}, \quad \dots$$

sämmtlich unter einander gleich, und bezeichnen wir den gemein-

$$\Sigma P(x \cos \beta - y \cos \alpha) = 0.$$

Nehmen wir nun zuerst an, das System befinde sich in Ruhe so ist:

$$\Sigma P(x \cos \beta - y \cos \alpha) = 0;$$

weil nun aber nach §. 12. 27):

$$\begin{aligned} \Sigma P \left\{ \begin{aligned} &(x-a)(\cos \beta \cos \bar{\omega} - \cos \gamma \cos \omega) \\ &+ (y-b)(\cos \gamma \cos \theta - \cos \alpha \cos \bar{\omega}) \\ &+ (z-c)(\cos \alpha \cos \omega - \cos \beta \cos \theta) \end{aligned} \right\} \\ = &(b \cos \bar{\omega} - c \cos \omega) \Sigma P \cos \alpha \\ &+ (c \cos \theta - a \cos \bar{\omega}) \Sigma P \cos \beta \\ &+ (a \cos \omega - b \cos \theta) \Sigma P \cos \gamma \\ &+ \cos \bar{\omega} \Sigma P(x \cos \beta - y \cos \alpha) \\ &+ \cos \theta \Sigma P(y \cos \gamma - z \cos \beta) \\ &+ \cos \omega \Sigma P(z \cos \alpha - x \cos \gamma), \end{aligned}$$

und für die als Axe der  $z$  angenommene feste Axe

$$a = 0, \quad b = 0; \quad \cos \theta = 0, \quad \cos \omega = 0$$

ist; so ist für die feste Axe:

$$\Sigma P \left\{ \begin{aligned} &(x-a)(\cos \beta \cos \bar{\omega} - \cos \gamma \cos \omega) \\ &+ (y-b)(\cos \gamma \cos \theta - \cos \alpha \cos \bar{\omega}) \\ &+ (z-c)(\cos \alpha \cos \omega - \cos \beta \cos \theta) \end{aligned} \right\} = 0,$$

immer die feste Axe als Axe der  $z$  angenommen.

Wenn sich also das System in Ruhe befindet, so ist für als Axe der  $z$  angenommene feste Axe:

$$\Sigma P \left\{ \begin{aligned} &(x-a)(\cos \beta \cos \bar{\omega} - \cos \gamma \cos \omega) \\ &+ (y-b)(\cos \gamma \cos \theta - \cos \alpha \cos \bar{\omega}) \\ &+ (z-c)(\cos \alpha \cos \omega - \cos \beta \cos \theta) \end{aligned} \right\} = 0.$$

Umgekehrt wollen wir annehmen, dass für die als Axe  $z$  angenommene feste Axe:

$$\Sigma P \left\{ \begin{aligned} &(x-a)(\cos \beta \cos \bar{\omega} - \cos \gamma \cos \omega) \\ &+ (y-b)(\cos \gamma \cos \theta - \cos \alpha \cos \bar{\omega}) \\ &+ (z-c)(\cos \alpha \cos \omega - \cos \beta \cos \theta) \end{aligned} \right\} = 0,$$

also nach §. 12. 27):

$$\left. \begin{aligned} & (b \cos \bar{\omega} - c \cos \omega) \Sigma P \cos \alpha \\ & + (c \cos \theta - a \cos \bar{\omega}) \Sigma P \cos \beta \\ & + (a \cos \omega - b \cos \theta) \Sigma P \cos \gamma \\ & + \cos \bar{\omega} \Sigma P (x \cos \beta - y \cos \alpha) \\ & + \cos \theta \Sigma P (y \cos \gamma - z \cos \beta) \\ & + \cos \omega \Sigma P (z \cos \alpha - x \cos \gamma) \end{aligned} \right\} = 0$$

ii. Dann ist, weil für die als Axe der  $z$  angenommene feste Axe:

$$a = 0, b = 0; \cos \theta = 0, \cos \omega = 0, \cos \bar{\omega} = \pm 1$$

t:

$$\Sigma P (x \cos \beta - y \cos \alpha) = 0,$$

und das System befindet sich folglich in Ruhe.

Wenn also für die als Axe der  $z$  angenommene feste Axe

$$\Sigma P \left\{ \begin{aligned} & (x-a)(\cos \beta \cos \bar{\omega} - \cos \gamma \cos \omega) \\ & + (y-b)(\cos \gamma \cos \theta - \cos \alpha \cos \bar{\omega}) \\ & + (z-c)(\cos \alpha \cos \omega - \cos \beta \cos \theta) \end{aligned} \right\} = 0$$

ist, so befindet sich das System in Ruhe.

Daher haben wir den folgenden Satz:

Wenn das System, an welchem die Kräfte

$$P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, \dots$$

wirken, um eine feste Axe drehbar ist; so wird, wenn an diese feste Axe als Axe der  $z$  annimmt, der Zustand der Ruhe des Systems dadurch vollständig bedingt, dass für die feste Axe die Gleichung:

$$\Sigma P \left\{ \begin{aligned} & (x-a)(\cos \beta \cos \bar{\omega} - \cos \gamma \cos \omega) \\ & + (y-b)(\cos \gamma \cos \theta - \cos \alpha \cos \bar{\omega}) \\ & + (z-c)(\cos \alpha \cos \omega - \cos \beta \cos \theta) \end{aligned} \right\} = 0$$

erfüllt ist.

Dass die vorhergehende Bedingungsgleichung für den Zustand der Ruhe des Systems auch durch die Bedingungsgleich.

$$\Sigma pP = 0,$$

er durch die Bedingungsgleichung

$$\Sigma PE \sin W = 0,$$

insofern diese Gleichungen als für die feste Axe gültig oder erfüllt vorausgesetzt werden, vollständig ersetzt werden kann, hellet ganz eben so wie im vorhergehenden Paragraphen.

Wenn die Kräfte

$$P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, \dots$$

sämmtlich in einer Ebene wirken, welche um einen festen Punkt oder vielmehr um eine durch diesen Punkt gehende, auf der Ebene senkrecht stehende Axe drehbar ist; so ist:

$$W_0 = W_1 = W_2 = W_3 = \dots = 90^\circ,$$

also:

$$\sin W_0 = \sin W_1 = \sin W_2 = \sin W_3 = \dots = 1,$$

und die kürzesten Entfernungen

$$E_0, E_1, E_2, E_3, E_4, \dots$$

sind die von dem festen Punkte auf die Richtungslinien der Kräfte gefällten Perpendikel. Die absoluten Werthe der Projectionen von

$$v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, \dots$$

auf den Richtungslinien der Kräfte sind in diesem Falle offenbar

$$v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, \dots$$

selbst, die Projectionen werden aber als positiv oder negativ betrachtet, je nachdem sie auf den wirklichen Richtungen der Kräfte oder auf den direct entgegengesetzten Richtungen liegen, und

$$E_0, E_1, E_2, E_3, E_4, \dots$$

werden mit den Projectionen sämmtlich von gleichen Vorzeichen, die Kräfte selbst werden aber sämmtlich als positiv betrachtet. Die Bedingungsgleichung für den Zustand der Ruhe des Systems ist in diesem Falle nach dem Obigen:

$$\Sigma PE = 0.$$

Man sieht nun aber leicht, dass es genügt, die kürzesten Entfernungen

$$E_0, E_1, E_2, E_3, E_4, \dots$$

und folglich auch die Producte

$$P_0 E_0, P_1 E_1, P_2 E_2, P_3 E_3, P_4 E_4, \dots$$

als positiv oder negativ zu betrachten, je nachdem die entspre-





$$\begin{aligned}
& (x_1 - x_0)(\cos \beta_1 \cos \gamma_0 - \cos \gamma_1 \cos \beta_0) \\
P_1 \left\{ \begin{aligned} & + (y_1 - y_0)(\cos \gamma_1 \cos \alpha_0 - \cos \alpha_1 \cos \gamma_0) \\ & + (z_1 - z_0)(\cos \alpha_1 \cos \beta_0 - \cos \beta_1 \cos \alpha_0) \end{aligned} \right\} \\
& + P_2 \left\{ \begin{aligned} & (x_2 - x_0)(\cos \beta_2 \cos \gamma_0 - \cos \gamma_2 \cos \beta_0) \\ & + (y_2 - y_0)(\cos \gamma_2 \cos \alpha_0 - \cos \alpha_2 \cos \gamma_0) \\ & + (z_2 - z_0)(\cos \alpha_2 \cos \beta_0 - \cos \beta_2 \cos \alpha_0) \end{aligned} \right\} \\
& + P_3 \left\{ \begin{aligned} & (x_3 - x_0)(\cos \beta_3 \cos \gamma_0 - \cos \gamma_3 \cos \beta_0) \\ & + (y_3 - y_0)(\cos \gamma_3 \cos \alpha_0 - \cos \alpha_3 \cos \gamma_0) \\ & + (z_3 - z_0)(\cos \alpha_3 \cos \beta_0 - \cos \beta_3 \cos \alpha_0) \end{aligned} \right\}
\end{aligned}
\left. \vphantom{\begin{aligned} P_1 \left\{ \right.} \right\} = 0,$$

$$\begin{aligned}
& (x_0 - x_1)(\cos \beta_0 \cos \gamma_1 - \cos \gamma_0 \cos \beta_1) \\
P_0 \left\{ \begin{aligned} & + (y_0 - y_1)(\cos \gamma_0 \cos \alpha_1 - \cos \alpha_0 \cos \gamma_1) \\ & + (z_0 - z_1)(\cos \alpha_0 \cos \beta_1 - \cos \beta_0 \cos \alpha_1) \end{aligned} \right\} \\
& + P_2 \left\{ \begin{aligned} & (x_2 - x_1)(\cos \beta_2 \cos \gamma_1 - \cos \gamma_2 \cos \beta_1) \\ & + (y_2 - y_1)(\cos \gamma_2 \cos \alpha_1 - \cos \alpha_2 \cos \gamma_1) \\ & + (z_2 - z_1)(\cos \alpha_2 \cos \beta_1 - \cos \beta_2 \cos \alpha_1) \end{aligned} \right\} \\
& + P_3 \left\{ \begin{aligned} & (x_3 - x_1)(\cos \beta_3 \cos \gamma_1 - \cos \gamma_3 \cos \beta_1) \\ & + (y_3 - y_1)(\cos \gamma_3 \cos \alpha_1 - \cos \alpha_3 \cos \gamma_1) \\ & + (z_3 - z_1)(\cos \alpha_3 \cos \beta_1 - \cos \beta_3 \cos \alpha_1) \end{aligned} \right\}
\end{aligned}
\left. \vphantom{\begin{aligned} P_0 \left\{ \right.} \right\} = 0,$$

$$\begin{aligned}
& (x_0 - x_2)(\cos \beta_0 \cos \gamma_2 - \cos \gamma_0 \cos \beta_2) \\
P_0 \left\{ \begin{aligned} & + (y_0 - y_2)(\cos \gamma_0 \cos \alpha_2 - \cos \alpha_0 \cos \gamma_2) \\ & + (z_0 - z_2)(\cos \alpha_0 \cos \beta_2 - \cos \beta_0 \cos \alpha_2) \end{aligned} \right\} \\
& + P_1 \left\{ \begin{aligned} & (x_1 - x_2)(\cos \beta_1 \cos \gamma_2 - \cos \gamma_1 \cos \beta_2) \\ & + (y_1 - y_2)(\cos \gamma_1 \cos \alpha_2 - \cos \alpha_1 \cos \gamma_2) \\ & + (z_1 - z_2)(\cos \alpha_1 \cos \beta_2 - \cos \beta_1 \cos \alpha_2) \end{aligned} \right\} \\
& + P_3 \left\{ \begin{aligned} & (x_3 - x_2)(\cos \beta_3 \cos \gamma_2 - \cos \gamma_3 \cos \beta_2) \\ & + (y_3 - y_2)(\cos \gamma_3 \cos \alpha_2 - \cos \alpha_3 \cos \gamma_2) \\ & + (z_3 - z_2)(\cos \alpha_3 \cos \beta_2 - \cos \beta_3 \cos \alpha_2) \end{aligned} \right\}
\end{aligned}
\left. \vphantom{\begin{aligned} P_0 \left\{ \right.} \right\} = 0,$$

$$\begin{aligned}
& (x_0 - x_3)(\cos \beta_0 \cos \gamma_3 - \cos \gamma_0 \cos \beta_3) \\
P_0 & \left\{ \begin{aligned} & + (y_0 - y_3)(\cos \gamma_0 \cos \alpha_3 - \cos \alpha_0 \cos \gamma_3) \\ & + (z_0 - z_3)(\cos \alpha_0 \cos \beta_3 - \cos \beta_0 \cos \alpha_3) \end{aligned} \right\} \\
& (x_1 - x_3)(\cos \beta_1 \cos \gamma_3 - \cos \gamma_1 \cos \beta_3) \\
+ P_1 & \left\{ \begin{aligned} & + (y_1 - y_3)(\cos \gamma_1 \cos \alpha_3 - \cos \alpha_1 \cos \gamma_3) \\ & + (z_1 - z_3)(\cos \alpha_1 \cos \beta_3 - \cos \beta_1 \cos \alpha_3) \end{aligned} \right\} \\
& (x_2 - x_3)(\cos \beta_2 \cos \gamma_3 - \cos \gamma_2 \cos \beta_3) \\
+ P_2 & \left\{ \begin{aligned} & + (y_2 - y_3)(\cos \gamma_2 \cos \alpha_3 - \cos \alpha_2 \cos \gamma_3) \\ & + (z_2 - z_3)(\cos \alpha_2 \cos \beta_3 - \cos \beta_2 \cos \alpha_3) \end{aligned} \right\}
\end{aligned}
\Bigg\} = 0;$$

so, wenn man der Kürze wegen:

1)

$$P_{01} = \left\{ \begin{aligned} & (x_0 - x_1)(\cos \beta_0 \cos \gamma_1 - \cos \gamma_0 \cos \beta_1) \\ & + (y_0 - y_1)(\cos \gamma_0 \cos \alpha_1 - \cos \alpha_0 \cos \gamma_1) \\ & + (z_0 - z_1)(\cos \alpha_0 \cos \beta_1 - \cos \beta_0 \cos \alpha_1) \end{aligned} \right\},$$

$$P_{02} = \left\{ \begin{aligned} & (x_0 - x_2)(\cos \beta_0 \cos \gamma_2 - \cos \gamma_0 \cos \beta_2) \\ & + (y_0 - y_2)(\cos \gamma_0 \cos \alpha_2 - \cos \alpha_0 \cos \gamma_2) \\ & + (z_0 - z_2)(\cos \alpha_0 \cos \beta_2 - \cos \beta_0 \cos \alpha_2) \end{aligned} \right\},$$

$$P_{03} = \left\{ \begin{aligned} & (x_0 - x_3)(\cos \beta_0 \cos \gamma_3 - \cos \gamma_0 \cos \beta_3) \\ & + (y_0 - y_3)(\cos \gamma_0 \cos \alpha_3 - \cos \alpha_0 \cos \gamma_3) \\ & + (z_0 - z_3)(\cos \alpha_0 \cos \beta_3 - \cos \beta_0 \cos \alpha_3) \end{aligned} \right\},$$

$$P_{12} = \left\{ \begin{aligned} & (x_1 - x_2)(\cos \beta_1 \cos \gamma_2 - \cos \gamma_1 \cos \beta_2) \\ & + (y_1 - y_2)(\cos \gamma_1 \cos \alpha_2 - \cos \alpha_1 \cos \gamma_2) \\ & + (z_1 - z_2)(\cos \alpha_1 \cos \beta_2 - \cos \beta_1 \cos \alpha_2) \end{aligned} \right\},$$

$$P_{13} = \left\{ \begin{aligned} & (x_1 - x_3)(\cos \beta_1 \cos \gamma_3 - \cos \gamma_1 \cos \beta_3) \\ & + (y_1 - y_3)(\cos \gamma_1 \cos \alpha_3 - \cos \alpha_1 \cos \gamma_3) \\ & + (z_1 - z_3)(\cos \alpha_1 \cos \beta_3 - \cos \beta_1 \cos \alpha_3) \end{aligned} \right\},$$

$$P_{23} = \left\{ \begin{aligned} & (x_2 - x_3)(\cos \beta_2 \cos \gamma_3 - \cos \gamma_2 \cos \beta_3) \\ & + (y_2 - y_3)(\cos \gamma_2 \cos \alpha_3 - \cos \alpha_2 \cos \gamma_3) \\ & + (z_2 - z_3)(\cos \alpha_2 \cos \beta_3 - \cos \beta_2 \cos \alpha_3) \end{aligned} \right\}$$

ist, die Gleichungen:

2)

$$P_1 P_{01} + P_2 P_{02} + P_3 P_{03} = 0,$$

$$P_0 P_{01} + P_2 P_{12} + P_3 P_{13} = 0,$$

$$P_0 P_{02} + P_1 P_{12} + P_3 P_{23} = 0,$$

$$P_0 P_{03} + P_1 P_{13} + P_2 P_{23} = 0;$$

oder die Gleichungen:

3)

$$P_0 P_1 P_{01} + P_0 P_2 P_{02} + P_0 P_3 P_{03} = 0,$$

$$P_0 P_1 P_{01} + P_1 P_2 P_{12} + P_1 P_3 P_{13} = 0,$$

$$P_0 P_2 P_{02} + P_1 P_2 P_{12} + P_2 P_3 P_{23} = 0,$$

$$P_0 P_3 P_{03} + P_1 P_3 P_{13} + P_2 P_3 P_{23} = 0;$$

oder, wenn

$$4) \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} \Pi_{01} = P_0 P_1 P_{01}, \\ \Pi_{02} = P_0 P_2 P_{02}, \\ \Pi_{03} = P_0 P_3 P_{03}, \\ \Pi_{12} = P_1 P_2 P_{12}, \\ \Pi_{13} = P_1 P_3 P_{13}, \\ \Pi_{23} = P_2 P_3 P_{23} \end{array} \right.$$

gesetzt wird:

5)

$$(1) \dots \dots \dots \Pi_{01} + \Pi_{02} + \Pi_{03} = 0,$$

$$(2) \dots \dots \dots \Pi_{01} + \Pi_{12} + \Pi_{13} = 0,$$

$$(3) \dots \dots \dots \Pi_{02} + \Pi_{12} + \Pi_{23} = 0,$$

$$(4) \dots \dots \dots \Pi_{03} + \Pi_{13} + \Pi_{23} = 0.$$

Aus (1), (4) und (2), (3) erhält man:

$$\Pi_{01} + \Pi_{02} = \Pi_{13} + \Pi_{23},$$

$$\Pi_{01} + \Pi_{13} = \Pi_{02} + \Pi_{23};$$

also durch Addition:

$$2\Pi_{01} + \Pi_{02} + \Pi_{13} = 2\Pi_{23} + \Pi_{13} + \Pi_{02},$$

folglich:

$$\Pi_{01} = \Pi_{23}.$$

Aus (1), (2) und (3), (4) erhält man:

$$\Pi_{02} + \Pi_{03} = \Pi_{12} + \Pi_{13},$$

$$\Pi_{02} + \Pi_{12} = \Pi_{03} + \Pi_{13};$$

so durch Addition:

$$2\Pi_{02} + \Pi_{03} + \Pi_{12} = 2\Pi_{13} + \Pi_{12} + \Pi_{03},$$

gleich:

$$\Pi_{02} = \Pi_{13}.$$

Aus (1), (3) und (2), (4) erhält man:

$$\Pi_{01} + \Pi_{03} = \Pi_{12} + \Pi_{23},$$

$$\Pi_{01} + \Pi_{12} = \Pi_{03} + \Pi_{23};$$

so durch Subtraction:

$$\Pi_{03} - \Pi_{12} = \Pi_{12} - \Pi_{03},$$

gleich:

$$2\Pi_{03} = 2\Pi_{12}, \quad \Pi_{03} = \Pi_{12}.$$

Daher haben wir jetzt die drei folgenden Gleichungen:

$$\Pi_{01} = \Pi_{23}, \quad \Pi_{02} = \Pi_{13}, \quad \Pi_{03} = \Pi_{12};$$

so nach 4) die Gleichungen:

6)

$$((1)) \dots P_0 P_1 P_{01} = P_2 P_3 P_{23},$$

$$((2)) \dots P_0 P_2 P_{02} = P_1 P_3 P_{13},$$

$$((3)) \dots P_0 P_3 P_{03} = P_1 P_2 P_{12}.$$

Durch Multiplication der Gleichungen

$$((1))((2)), \quad ((2))((3)), \quad ((3))((1))$$

und durch Multiplication derselben Gleichungen über's Kreuz hält man:

7)

$$P_0^2 P_{01} P_{02} = P_3^2 P_{13} P_{23},$$

$$P_0^2 P_{02} P_{03} = P_1^2 P_{12} P_{13},$$

$$P_0^2 P_{01} P_{03} = P_2^2 P_{12} P_{23},$$

$$P_1^2 P_{01} P_{12} = P_3^2 P_{03} P_{23},$$

$$P_1^2 P_{01} P_{13} = P_2^2 P_{02} P_{23},$$

$$P_2^2 P_{02} P_{12} = P_3^2 P_{03} P_{13};$$

gleich ist:

$$\begin{aligned}
 P_1^2 &= P_0^2 \frac{P_{02} P_{03}}{P_{12} P_{13}} = P_0^2 \frac{P_{02} P_{03} P_{23}}{P_{12} P_{13} P_{23}}, \\
 P_2^2 &= P_0^2 \frac{P_{01} P_{03}}{P_{12} P_{23}} = P_0^2 \frac{P_{01} P_{03} P_{13}}{P_{12} P_{13} P_{23}}, \\
 P_3^2 &= P_0^2 \frac{P_{01} P_{02}}{P_{13} P_{23}} = P_0^2 \frac{P_{01} P_{02} P_{12}}{P_{12} P_{13} P_{23}};
 \end{aligned}$$

und man kann also, wenn  $k$  eine gewisse Constante bezeichne offenbar:

8)

$$\begin{aligned}
 P_0^2 &= k P_{12} P_{13} P_{23}, \\
 P_1^2 &= k P_{02} P_{03} P_{23}, \\
 P_2^2 &= k P_{01} P_{03} P_{13}, \\
 P_3^2 &= k P_{01} P_{02} P_{12};
 \end{aligned}$$

oder, weil nach 1), wie man sogleich übersieht:

$$P_{13} = P_{31}, \quad P_{03} = P_{30}, \quad P_{02} = P_{20}$$

gesetzt werden kann:

8\*)

$$\begin{aligned}
 P_0^2 &= k P_{12} P_{23} P_{31}, \\
 P_1^2 &= k P_{23} P_{30} P_{02}, \\
 P_2^2 &= k P_{30} P_{01} P_{13}, \\
 P_3^2 &= k P_{01} P_{12} P_{20}
 \end{aligned}$$

setzen.

Aus 8) erhält man durch Multiplication:

9)

$$P_0^2 P_1^2 P_2^2 P_3^2 = k^4 P_{01}^2 P_{02}^2 P_{03}^2 P_{12}^2 P_{13}^2 P_{23}^2.$$

Ferner erhält man aus 6) und 8):

10)

$$\begin{aligned}
 P_0^2 P_1^2 P_{01}^2 &= P_2^2 P_3^2 P_{23}^2 = k^2 P_{01}^2 P_{02} P_{03} P_{12} P_{13} P_{23}^2, \\
 P_0^2 P_2^2 P_{02}^2 &= P_1^2 P_3^2 P_{13}^2 = k^2 P_{01} P_{02}^2 P_{03} P_{12} P_{13}^2 P_{23}, \\
 P_0^2 P_3^2 P_{03}^2 &= P_1^2 P_2^2 P_{12}^2 = k^2 P_{01} P_{02} P_{03}^2 P_{12}^2 P_{13} P_{23};
 \end{aligned}$$

oder:

$$\begin{aligned}
 P_0^2 P_1^2 P_{01}^2 &= P_2^2 P_3^2 P_{23}^2 \\
 &= k^2 P_{01} P_{02} P_{03} P_{12} P_{13} P_{23} \cdot P_{01} P_{23}, \\
 P_0^2 P_2^2 P_{02}^2 &= P_1^2 P_3^2 P_{13}^2 \\
 &= k^2 P_{01} P_{02} P_{03} P_{12} P_{13} P_{23} \cdot P_{02} P_{13},
 \end{aligned}$$

$$P_0^2 P_1^2 P_{01}^2 = P_1^2 P_2^2 P_{12}^2 \\ = k^2 P_{01} P_{02} P_{03} P_{12} P_{13} P_{23} \cdot P_{03} P_{12};$$

so, wenn man:

$$11) \dots\dots\dots K = k^2 P_{01} P_{02} P_{03} P_{12} P_{13} P_{23}$$

setzt:

12)

$$P_0^2 P_1^2 P_{01}^2 = P_2^2 P_3^2 P_{23}^2 = K P_{01} P_{23},$$

$$P_0^2 P_2^2 P_{02}^2 = P_1^2 P_3^2 P_{13}^2 = K P_{02} P_{13},$$

$$P_0^2 P_3^2 P_{03}^2 = P_1^2 P_2^2 P_{12}^2 = K P_{03} P_{12}.$$

Bezeichnet man die absoluten Werthe der Grössen:

$$K, P_{01}, P_{02}, P_{03}, P_{12}, P_{13}, P_{23}$$

durch

$$(K), (P_{01}), (P_{02}), (P_{03}), (P_{12}), (P_{13}), (P_{23});$$

so ist nach 12):

13)

$$P_0 P_1 P_{01} = \pm \sqrt{(K)} \cdot \sqrt{(P_{01})(P_{23})},$$

$$P_0 P_2 P_{02} = \pm \sqrt{(K)} \cdot \sqrt{(P_{02})(P_{13})},$$

$$P_0 P_3 P_{03} = \pm \sqrt{(K)} \cdot \sqrt{(P_{03})(P_{12})},$$

$$P_1 P_2 P_{12} = \pm \sqrt{(K)} \cdot \sqrt{(P_{03})(P_{13})},$$

$$P_1 P_3 P_{13} = \pm \sqrt{(K)} \cdot \sqrt{(P_{02})(P_{12})},$$

$$P_2 P_3 P_{23} = \pm \sqrt{(K)} \cdot \sqrt{(P_{01})(P_{23})}.$$

Wenn man nur, was natürlich verstattet ist, die Winkel

$$\alpha_0, \beta_0, \gamma_0; \alpha_1, \beta_1, \gamma_1; \alpha_2, \beta_2, \gamma_2; \alpha_3, \beta_3, \gamma_3$$

den wirklichen Richtungen der Kräfte entsprechen lässt, so sind alle Kräfte positiv, und in den vorstehenden Gleichungen sind nun die oberen oder unteren Vorzeichen zu nehmen, je nachdem beziehungsweise die Grössen

$$P_{01}, P_{02}, P_{03}, P_{12}, P_{13}, P_{23}$$

positiv oder negativ sind.

Aus 3) und 13) ergeben sich die Gleichungen:

14)

$$\pm\sqrt{(P_{01})(P_{23})}\pm\sqrt{(P_{02})(P_{13})}\pm\sqrt{(P_{03})(P_{12})}=0,$$

$$\pm\sqrt{(P_{01})(P_{23})}\pm\sqrt{(P_{03})(P_{12})}\pm\sqrt{(P_{02})(P_{13})}=0,$$

$$\pm\sqrt{(P_{02})(P_{13})}\pm\sqrt{(P_{03})(P_{12})}\pm\sqrt{(P_{01})(P_{23})}=0,$$

$$\pm\sqrt{(P_{03})(P_{12})}\pm\sqrt{(P_{02})(P_{13})}\pm\sqrt{(P_{01})(P_{23})}=0;$$

in denen die oberen oder unteren Zeichen zu nehmen sind, je nachdem beziehungsweise die Grössen:

$$P_{01}, P_{02}, P_{03};$$

$$P_{01}, P_{12}, P_{13};$$

$$P_{02}, P_{12}, P_{23};$$

$$P_{03}, P_{13}, P_{23}$$

positiv oder negativ sind. Man kann die Gleichungen 14) auf folgende Weise schreiben:

15)

$$\pm\sqrt{(P_{01})(P_{23})}\pm\sqrt{(P_{02})(P_{13})}\pm\sqrt{(P_{03})(P_{12})}=0,$$

$$\pm\sqrt{(P_{10})(P_{23})}\pm\sqrt{(P_{12})(P_{03})}\pm\sqrt{(P_{13})(P_{02})}=0,$$

$$\pm\sqrt{(P_{20})(P_{13})}\pm\sqrt{(P_{21})(P_{03})}\pm\sqrt{(P_{23})(P_{01})}=0,$$

$$\pm\sqrt{(P_{30})(P_{12})}\pm\sqrt{(P_{31})(P_{02})}\pm\sqrt{(P_{32})(P_{01})}=0;$$

wo die oberen oder unteren Zeichen zu nehmen sind, je nachdem beziehungsweise die Grössen:

$$P_{01}, P_{02}, P_{03};$$

$$P_{10}, P_{12}, P_{13};$$

$$P_{20}, P_{21}, P_{23};$$

$$P_{30}, P_{31}, P_{32}$$

positiv oder negativ sind.

Die Bildungsweise der Gleichungen 15) unterliegt keinem Zweifel, und der Zusammenhang der Grössen

$$P_{01}, P_{02}, P_{03}, P_{12}, P_{13}, P_{23}$$

mit den kürzesten Entfernungen der Richtungslinien der Kräfte und den von denselben eingeschlossenen Winkeln ist aus unseren früheren Entwicklungen bekannt, aus denen sich auch leicht

dere Regeln wie die obigen zur Bestimmung der Vorzeichen den Gleichungen 15) ableiten lassen würden, was wir füglich in sich für diesen Gegenstand interessirenden Leser überlassen können; für die Statik im Allgemeinen ist derselbe von keiner besonderen Bedeutung, so merkwürdig auch jedenfalls die vorher entwickelten, schon anderweitig bekannten, Relationen, die sich also aus ihnen in dieser Abhandlung bewiesenen allgemeinen, für jede beliebige Anzahl von Kräften geltenden Gleichungen ableiten lassen, sind, und über die man u. A. auch einen Aufsatz von E. D'Ovidio in „Giornale di Matematiche ad uso degli studenti delle Università Italiane, pubblicato per cura del Professore Battaglini. Anno IV. Gennaio e Febbraio 1866. p. 58.“ nachsehen kann. Erinnern mag man sich hier auch noch an den von mir im „Archiv. Thl. XLV. S. 66.“ bewiesenen Satz vom Tetraeder, der, so viel ich weiss, ursprünglich von Chasles herrührt, was a. a. O. nicht bemerkt worden ist.

---



**XIV.**

**Der Mittelpunkt oder das Centrum beliebig vieler  
auf beliebige Weise in einer und derselben Ebene  
wirkender Kräfte.**

**Von  
dem Herausgeber.**

---

**§. 1.**

Wir wollen zuerst nur eine im Anfange der Coordinaten  $O$  und in der Ebene der  $xy$ , in welcher wir uns überhaupt alle unsere folgenden Constructionen ausgeführt denken, auf welche sich alle unsere folgenden Betrachtungen allein beziehen werden, wirkende Kraft betrachten, die im Allgemeinen durch  $P_x$  bezeichnet werden mag; den von dem positiven Theile der Richtungslinie dieser Kraft mit dem positiven Theile der Axe der  $x$  eingeschlossenen Winkel, indem wir diesen Winkel von dem positiven Theile der Axe der  $x$  an nach dem positiven Theile der Axe der  $y$  hin, oder durch den Coordinatenwinkel  $(xy)$  hindurch, von  $0$  bis  $360^\circ$  zählen, bezeichnen wir durch  $\alpha_x$ . Durch Drehung des positiven Theils der Richtungslinie der Kraft  $P_x$  um den Anfang der Coordinaten  $O$ , die wir uns der Einfachheit wegen, und um die Begriffe zu fixiren, immer in dem Sinne von dem positiven Theile der Axe der  $x$  an nach dem positiven Theile der Axe  $y$  hin oder durch den Coordinatenwinkel  $(xy)$  hindurch vor sich gehend denken, um einen Winkel  $\theta$ , den wir jedoch, was völlig hinreicht, der Einfachheit wegen nicht grösser als  $360^\circ$  annehmen, lassen wir nun den positiven Theil der Richtungslinie der Kraft  $P_x$  in eine andere Lage



$$3) \dots \alpha_{\lambda}' - \alpha_{\lambda} = \theta \text{ oder } \alpha_{\lambda}' - \alpha_{\lambda} = \theta - 360^{\circ},$$

jenachdem bei dieser Drehung ein Durchgang des positiven Theils der Richtungslinie der Kraft  $P_{\lambda}$  durch den positiven Theil der Axe der  $x$  nicht Statt gefunden oder Statt gefunden hat.

Bezeichnen wir nun durch  $m$  überhaupt eine ganze Zahl ist nach 1) und 3) offenbar:

$$4) \dots (\alpha_x' - \alpha_x) + (\alpha_{\lambda}' - \alpha_{\lambda}) = 2\theta + m \cdot 360^{\circ},$$

oder:

$$5) \dots \frac{1}{2} \{ (\alpha_x' - \alpha_x) + (\alpha_{\lambda}' - \alpha_{\lambda}) \} = \theta + m \cdot 180^{\circ},$$

wo  $m$  eine gerade oder eine ungerade Zahl ist, jenachdem die positiven Theile der Richtungslinien der beiden Kräfte und  $P_{\lambda}$  Durchgänge durch den positiven Theil der Axe der  $x$  nicht Statt gefunden oder Statt gefunden haben; oder für die einen der beiden Kräfte kein Durchgang des positiven Theils der Richtungslinie, für die andere Kraft ein Durchgang des positiven Theils der Richtungslinie durch den positiven Theil der Axe der  $x$  Statt gefunden hat.

Nach 1) und 3) sind die folgenden Zusammenstellungen möglich:

$$\begin{aligned} \alpha_x' - \alpha_x &= \theta, & \alpha_{\lambda}' - \alpha_{\lambda} &= \theta; \\ \alpha_x' - \alpha_x &= \theta, & \alpha_{\lambda}' - \alpha_{\lambda} &= \theta - 360^{\circ}; \\ \alpha_x' - \alpha_x &= \theta - 360^{\circ}, & \alpha_{\lambda}' - \alpha_{\lambda} &= \theta; \\ \alpha_x' - \alpha_x &= \theta - 360^{\circ}, & \alpha_{\lambda}' - \alpha_{\lambda} &= \theta - 360^{\circ}; \end{aligned}$$

und es kann also beziehungsweise sein:

$$\begin{aligned} (\alpha_x' - \alpha_x) - (\alpha_{\lambda}' - \alpha_{\lambda}) &= 0, \\ (\alpha_x' - \alpha_x) - (\alpha_{\lambda}' - \alpha_{\lambda}) &= +360^{\circ}, \\ (\alpha_x' - \alpha_x) - (\alpha_{\lambda}' - \alpha_{\lambda}) &= -360^{\circ}, \\ (\alpha_x' - \alpha_x) - (\alpha_{\lambda}' - \alpha_{\lambda}) &= 0; \end{aligned}$$

also:

$$\begin{aligned} \alpha_x' - \alpha_x &= \alpha_{\lambda}' - \alpha_{\lambda}, \\ \alpha_x' - \alpha_x &= \alpha_{\lambda}' - \alpha_{\lambda} \pm 360^{\circ}; \end{aligned}$$

folglich:

$$\begin{aligned} \alpha_x' + \alpha_{\lambda} &= \alpha_x + \alpha_{\lambda}', \\ \alpha_x' + \alpha_{\lambda} &= \alpha_x + \alpha_{\lambda}' \pm 360^{\circ}; \end{aligned}$$

und daher allgemein mit Rücksicht auf 1) und 3):



also :

$$\frac{1}{2}\{(\alpha_\lambda - \alpha_x) + (\alpha_\lambda' - \alpha_x')\} = (P_x P_\lambda) + n \cdot 180^\circ,$$

wo  $n$  eine gerade oder eine ungerade Zahl ist, jenachdem für die positiven Theile der Richtungslinien der beiden Kräfte  $P_x$  und  $P_\lambda$  Durchgänge durch den positiven Theil der Axe der  $x$  nicht Statt gefunden oder Statt gefunden haben; oder für die eine der beiden Kräfte kein Durchgang des positiven Theils der Richtungslinie, für die andere Kraft ein Durchgang des positiven Theils der Richtungslinie durch den positiven Theil der Axe der  $x$  Statt gefunden hat.

Wenn  $\alpha_x > \alpha_\lambda$  ist, so ist ganz eben so und mit denselben Bedingungen rücksichtlich der ganzen Zahl  $n'$ :

$$(\alpha_x - \alpha_\lambda) + (\alpha_x' - \alpha_\lambda') = 2(P_\lambda P_x) + n' \cdot 360^\circ,$$

also :

$$\frac{1}{2}\{(\alpha_x - \alpha_\lambda) + (\alpha_x' - \alpha_\lambda')\} = (P_\lambda P_x) + n' \cdot 180^\circ;$$

da aber nach 2):

$$(P_\lambda P_x) = 360^\circ - (P_x P_\lambda)$$

ist, so ist:

$$(\alpha_x - \alpha_\lambda) + (\alpha_x' - \alpha_\lambda') = (n' + 2) \cdot 360^\circ - 2(P_x P_\lambda),$$

also:

$$\frac{1}{2}\{(\alpha_x - \alpha_\lambda) + (\alpha_x' - \alpha_\lambda')\} = (n' + 2) \cdot 180^\circ - (P_x P_\lambda);$$

folglich:

$$(\alpha_\lambda - \alpha_x) + (\alpha_\lambda' - \alpha_x') = 2(P_x P_\lambda) - (n' + 2) \cdot 360^\circ$$

und:

$$\frac{1}{2}\{(\alpha_\lambda - \alpha_x) + (\alpha_\lambda' - \alpha_x')\} = (P_x P_\lambda) - (n' + 2) \cdot 180^\circ,$$

wo  $n' + 2$  eine gerade oder eine ungerade Zahl ist, jenachdem für die positiven Theile der Richtungslinien der beiden Kräfte  $P_x$  und  $P_\lambda$  Durchgänge durch den positiven Theil der Axe der  $x$  nicht Statt gefunden oder Statt gefunden haben; oder für die eine der beiden Kräfte kein Durchgang des positiven Theils der Richtungslinie, für die andere Kraft ein Durchgang des positiven Theils der Richtungslinie durch den positiven Theil der Axe der  $x$  Statt gefunden hat.

Hieraus ergibt sich nun, dass in den beiden so eben betrachteten Fällen:

$$8) \dots (\alpha_\lambda - \alpha_x) + (\alpha_\lambda' - \alpha_x') = 2(P_x P_\lambda) + n \cdot 360^\circ,$$

Also:

$$9) \dots \frac{1}{2}\{(\alpha_\lambda - \alpha_x) + (\alpha_\lambda' - \alpha_x')\} = (P_x P_\lambda) + n \cdot 180^\circ$$

gesetzt werden kann, wo  $n$  eine gerade oder eine ungerade Zahl ist, jenachdem für die positiven Theile der Richtungslinien der beiden Kräfte  $P_x$  und  $P_\lambda$  Durchgänge durch den positiven Theil der Axe der  $x$  nicht Statt gefunden oder Statt gefunden haben; oder für die eine der beiden Kräfte kein Durchgang des positiven Theils der Richtungslinie, für die andere Kraft ein Durchgang des positiven Theils der Richtungslinie durch den positiven Theil der Axe der  $x$  Statt gefunden hat.

Nach 5) und 9) ist nun in völliger Allgemeinheit:

$$10) \dots \begin{cases} \frac{1}{2}\{(\alpha_x' - \alpha_x) + (\alpha_\lambda' - \alpha_\lambda)\} = \theta + m \cdot 180^\circ, \\ \frac{1}{2}\{(\alpha_\lambda - \alpha_x) + (\alpha_\lambda' - \alpha_x')\} = (P_x P_\lambda) + n \cdot 180^\circ; \end{cases}$$

wo  $m$  und  $n$  gleichzeitig gerade und ungerade Zahlen sind.

Also ist:

$$11) \dots \begin{cases} \sin \frac{1}{2}\{(\alpha_x' - \alpha_x) + (\alpha_\lambda' - \alpha_\lambda)\} = (-1)^m \sin \theta, \\ \cos \frac{1}{2}\{(\alpha_x' - \alpha_x) + (\alpha_\lambda' - \alpha_\lambda)\} = (-1)^m \cos \theta; \end{cases}$$

und:

$$12) \dots \begin{cases} \sin \frac{1}{2}\{(\alpha_\lambda - \alpha_x) + (\alpha_\lambda' - \alpha_x')\} = (-1)^n \sin (P_x P_\lambda), \\ \cos \frac{1}{2}\{(\alpha_\lambda - \alpha_x) + (\alpha_\lambda' - \alpha_x')\} = (-1)^n \cos (P_x P_\lambda). \end{cases}$$

Wir wollen nun noch einige Relationen entwickeln, von denen wir im Folgenden Gebrauch machen werden.

Es ist:

$$\begin{aligned} & \sin (\alpha_x' - \alpha_\lambda) + \sin (\alpha_\lambda' - \alpha_x) \\ &= 2 \sin \frac{1}{2}\{(\alpha_x' - \alpha_\lambda) + (\alpha_\lambda' - \alpha_x)\} \cos \frac{1}{2}\{(\alpha_x' - \alpha_\lambda) - (\alpha_\lambda' - \alpha_x)\} \\ &= 2 \sin \frac{1}{2}\{(\alpha_x' - \alpha_x) + (\alpha_\lambda' - \alpha_\lambda)\} \cos \frac{1}{2}\{(\alpha_\lambda - \alpha_x) + (\alpha_\lambda' - \alpha_x')\}, \\ & \cos (\alpha_x' - \alpha_\lambda) + \cos (\alpha_\lambda' - \alpha_x) \\ &= 2 \cos \frac{1}{2}\{(\alpha_x' - \alpha_\lambda) + (\alpha_\lambda' - \alpha_x)\} \cos \frac{1}{2}\{(\alpha_x' - \alpha_\lambda) - (\alpha_\lambda' - \alpha_x)\} \\ &= 2 \cos \frac{1}{2}\{(\alpha_x' - \alpha_x) + (\alpha_\lambda' - \alpha_\lambda)\} \cos \frac{1}{2}\{(\alpha_\lambda - \alpha_x) + (\alpha_\lambda' - \alpha_x')\}; \end{aligned}$$

folglich nach 11) und 12):

$$\begin{aligned} \sin (\alpha_x' - \alpha_\lambda) + \sin (\alpha_\lambda' - \alpha_x) &= 2 (-1)^{m+n} \sin \theta \cos (P_x P_\lambda), \\ \cos (\alpha_x' - \alpha_\lambda) + \cos (\alpha_\lambda' - \alpha_x) &= 2 (-1)^{m+n} \cos \theta \cos (P_x P_\lambda); \end{aligned}$$

also, weil  $m + n$  nach dem Obigen jedenfalls eine gerade Zahl ist

13)

$$\sin(\alpha_x' - \alpha_\lambda) + \sin(\alpha_\lambda' - \alpha_x) = 2 \sin \theta \cos(P_x P_\lambda),$$

$$\cos(\alpha_x' - \alpha_\lambda) + \cos(\alpha_\lambda' - \alpha_x) = 2 \cos \theta \cos(P_x P_\lambda).$$

Ferner ist:

$$2(\sin \alpha_x' \cos \alpha_\lambda - \sin \alpha_x \cos \alpha_\lambda')$$

$$= \sin(\alpha_x' + \alpha_\lambda) + \sin(\alpha_x' - \alpha_\lambda) - \sin(\alpha_x + \alpha_\lambda') - \sin(\alpha_x - \alpha_\lambda'),$$

also nach 7):

$$2(\sin \alpha_x' \cos \alpha_\lambda - \sin \alpha_x \cos \alpha_\lambda')$$

$$= \sin(\alpha_x' - \alpha_\lambda) - \sin(\alpha_x - \alpha_\lambda')$$

$$= 2 \sin \frac{1}{2} \{(\alpha_x' - \alpha_\lambda) - (\alpha_x - \alpha_\lambda')\} \cos \frac{1}{2} \{(\alpha_x' - \alpha_\lambda) + (\alpha_x - \alpha_\lambda')\}$$

$$= 2 \sin \frac{1}{2} \{(\alpha_x' - \alpha_x) + (\alpha_\lambda' - \alpha_\lambda)\} \cos \frac{1}{2} \{(\alpha_\lambda - \alpha_x) + (\alpha_\lambda' - \alpha_x')\};$$

$$2(\cos \alpha_x' \cos \alpha_\lambda - \cos \alpha_x \cos \alpha_\lambda')$$

$$= \cos(\alpha_x' + \alpha_\lambda) + \cos(\alpha_x' - \alpha_\lambda) - \cos(\alpha_x + \alpha_\lambda') - \cos(\alpha_x - \alpha_\lambda'),$$

also nach 7):

$$2(\cos \alpha_x' \cos \alpha_\lambda - \cos \alpha_x \cos \alpha_\lambda')$$

$$= \cos(\alpha_x' - \alpha_\lambda) - \cos(\alpha_x - \alpha_\lambda')$$

$$= -2 \sin \frac{1}{2} \{(\alpha_x' - \alpha_\lambda) - (\alpha_x - \alpha_\lambda')\} \sin \frac{1}{2} \{(\alpha_x' - \alpha_\lambda) + (\alpha_x - \alpha_\lambda')\}$$

$$= 2 \sin \frac{1}{2} \{(\alpha_x' - \alpha_x) + (\alpha_\lambda' - \alpha_\lambda)\} \sin \frac{1}{2} \{(\alpha_\lambda - \alpha_x) + (\alpha_\lambda' - \alpha_x')\};$$

folglich nach 11) und 12):

$$\sin \alpha_x' \cos \alpha_\lambda - \sin \alpha_x \cos \alpha_\lambda' = (-1)^{m+n} \sin \theta \cos(P_x P_\lambda),$$

$$\cos \alpha_x' \cos \alpha_\lambda - \cos \alpha_x \cos \alpha_\lambda' = (-1)^{m+n} \sin \theta \sin(P_x P_\lambda);$$

also wie vorher:

14)

$$\sin \alpha_x' \cos \alpha_\lambda - \sin \alpha_x \cos \alpha_\lambda' = \sin \theta \cos(P_x P_\lambda),$$

$$\cos \alpha_x' \cos \alpha_\lambda - \cos \alpha_x \cos \alpha_\lambda' = \sin \theta \sin(P_x P_\lambda).$$

Auf ähnliche Art ist:

$$2(\sin \alpha_x' \sin \alpha_\lambda - \sin \alpha_x \sin \alpha_\lambda')$$

$$= \cos(\alpha_x' - \alpha_\lambda) - \cos(\alpha_x' + \alpha_\lambda) - \cos(\alpha_x - \alpha_\lambda') + \cos(\alpha_x + \alpha_\lambda'),$$

also nach 7):

$$\begin{aligned}
 & 2(\sin \alpha_x' \sin \alpha_\lambda - \sin \alpha_x \sin \alpha_\lambda') \\
 = & \cos(\alpha_x' - \alpha_\lambda) - \cos(\alpha_x - \alpha_\lambda') \\
 = & -2 \sin \frac{1}{2}(\alpha_x' - \alpha_\lambda) \sin \frac{1}{2}(\alpha_x' - \alpha_\lambda) + (\alpha_x - \alpha_\lambda') \\
 = & 2 \sin \frac{1}{2}(\alpha_x' - \alpha_x) + (\alpha_\lambda' - \alpha_\lambda) \sin \frac{1}{2}(\alpha_\lambda - \alpha_x) + (\alpha_\lambda' - \alpha_x') \};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & 2(\cos \alpha_x' \sin \alpha_\lambda - \cos \alpha_x \sin \alpha_\lambda') \\
 = & \sin(\alpha_x' + \alpha_\lambda) - \sin(\alpha_x' - \alpha_\lambda) - \sin(\alpha_x + \alpha_\lambda') + \sin(\alpha_x - \alpha_\lambda'),
 \end{aligned}$$

also nach 7):

$$\begin{aligned}
 & 2(\cos \alpha_x' \sin \alpha_\lambda - \cos \alpha_x \sin \alpha_\lambda') \\
 = & \sin(\alpha_x - \alpha_\lambda') - \sin(\alpha_x' - \alpha_\lambda) \\
 = & 2 \sin \frac{1}{2}(\alpha_x - \alpha_\lambda') - (\alpha_x' - \alpha_\lambda) \cos \frac{1}{2}(\alpha_x - \alpha_\lambda') + (\alpha_x' - \alpha_\lambda) \\
 = & -2 \sin \frac{1}{2}(\alpha_x' - \alpha_x) + (\alpha_\lambda' - \alpha_\lambda) \cos \frac{1}{2}(\alpha_\lambda - \alpha_x) + (\alpha_\lambda' - \alpha_x') \};
 \end{aligned}$$

folglich nach 11) und 12):

$$\begin{aligned}
 \sin \alpha_x' \sin \alpha_\lambda - \sin \alpha_x \sin \alpha_\lambda' &= (-1)^{m+n} \sin \theta \sin(P_x P_\lambda), \\
 \cos \alpha_x' \sin \alpha_\lambda - \cos \alpha_x \sin \alpha_\lambda' &= -(-1)^{m+n} \sin \theta \cos(P_x P_\lambda);
 \end{aligned}$$

also wie vorher:

15)

$$\begin{aligned}
 \sin \alpha_x' \sin \alpha_\lambda - \sin \alpha_x \sin \alpha_\lambda' &= \sin \theta \sin(P_x P_\lambda), \\
 \cos \alpha_x' \sin \alpha_\lambda - \cos \alpha_x \sin \alpha_\lambda' &= -\sin \theta \cos(P_x P_\lambda).
 \end{aligned}$$

Aus der ersten der Gleichungen 7) folgt:

$$\sin \alpha_x' \cos \alpha_\lambda + \cos \alpha_x' \sin \alpha_\lambda = \sin \alpha_x \cos \alpha_\lambda' + \cos \alpha_x \sin \alpha_\lambda',$$

also:

$$\sin \alpha_x' \cos \alpha_\lambda - \sin \alpha_x \cos \alpha_\lambda' = -(\cos \alpha_x' \sin \alpha_\lambda - \cos \alpha_x \sin \alpha_\lambda');$$

und aus der zweiten der Gleichungen 7) folgt:

$$\cos \alpha_x' \cos \alpha_\lambda - \sin \alpha_x' \sin \alpha_\lambda = \cos \alpha_x \cos \alpha_\lambda' - \sin \alpha_x \sin \alpha_\lambda',$$

also:

$$\cos \alpha_x' \cos \alpha_\lambda - \cos \alpha_x \cos \alpha_\lambda' = \sin \alpha_x' \sin \alpha_\lambda - \sin \alpha_x \sin \alpha_\lambda';$$

welche Resultate mit den aus 14) und 15) durch Gleichsetzung der betreffenden Werthe sich ergebenden Gleichungen übereinstimmen.

## §. 2.

Wir wollen jetzt ein beliebiges System sämmtlich in einer



Ebene, die wir zugleich als Ebene der  $xy$  annehmen, an durch die Coordinaten

$$x_0, y_0; x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3; x_4, y_4; \dots$$

bestimmten Punkten wirkender Kräfte

$$P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, \dots$$

betrachten, und bezeichnen die von den positiven Theilen der Richtungslinien dieser Kräfte mit dem positiven Theile der  $A$  der  $x$  eingeschlossenen Winkel, indem wir diesen Winkel von dem positiven Theile der Axe der  $x$  an nach dem positiven Theile der Axe der  $y$  hin oder durch den Coordinatenwinkel  $(xy)$  hindurch von 0 bis  $360^\circ$  zählen, beziehungsweise durch

$$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \dots$$

Wir nehmen an, dass es für diese Kräfte eine nicht verschwindende Resultirende gebe, welches bekanntlich der Fall ist, wenn die Grössen  $L$  und  $M$  nicht zugleich verschwinden oder, was dasselbe ist, wenn die Grösse  $L^2 + M^2$  nicht verschwindet. Weil bekanntlich:

1)

$$L = P_0 \cos \alpha_0 + P_1 \cos \alpha_1 + P_2 \cos \alpha_2 + P_3 \cos \alpha_3 + \dots,$$

$$M = P_0 \sin \alpha_0 + P_1 \sin \alpha_1 + P_2 \sin \alpha_2 + P_3 \sin \alpha_3 + \dots$$

ist, so ist offenbar:

$$\begin{aligned} L^2 + M^2 = & P_0^2 + P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 + P_4^2 + \dots \\ & + 2P_0 P_1 (\cos \alpha_0 \cos \alpha_1 + \sin \alpha_0 \sin \alpha_1) \\ & + 2P_0 P_2 (\cos \alpha_0 \cos \alpha_2 + \sin \alpha_0 \sin \alpha_2) \\ & + 2P_0 P_3 (\cos \alpha_0 \cos \alpha_3 + \sin \alpha_0 \sin \alpha_3) \\ & + 2P_0 P_4 (\cos \alpha_0 \cos \alpha_4 + \sin \alpha_0 \sin \alpha_4) \\ & \text{u. s. w.} \\ & + 2P_1 P_2 (\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \sin \alpha_1 \sin \alpha_2) \\ & + 2P_1 P_3 (\cos \alpha_1 \cos \alpha_3 + \sin \alpha_1 \sin \alpha_3) \\ & + 2P_1 P_4 (\cos \alpha_1 \cos \alpha_4 + \sin \alpha_1 \sin \alpha_4) \\ & \text{u. s. w.} \\ & + 2P_2 P_3 (\cos \alpha_2 \cos \alpha_3 + \sin \alpha_2 \sin \alpha_3) \\ & + 2P_2 P_4 (\cos \alpha_2 \cos \alpha_4 + \sin \alpha_2 \sin \alpha_4) \\ & \text{u. s. w.} \\ & + 2P_3 P_4 (\cos \alpha_3 \cos \alpha_4 + \sin \alpha_3 \sin \alpha_4) \\ & \text{u. s. w.,} \\ & \text{u. s. w.} \end{aligned}$$



beziehungsweise das erste und das zweite System nennen, — werden alle auf das zweite System bezüglichen Grössen mit denselben Buchstaben wie die entsprechenden Grössen des ersten Systems, zur Unterscheidung jedoch mit oberen Accenten versehen, insofern überhaupt eine solche Unterscheidung nöthig ist, bezeichnen.

Weil nun mit Anwendung dieser Bezeichnung:

3)

$$L' = P_0 \cos \alpha_0' + P_1 \cos \alpha_1' + P_2 \cos \alpha_2' + P_3 \cos \alpha_3' + \dots,$$

$$M' = P_0 \sin \alpha_0' + P_1 \sin \alpha_1' + P_2 \sin \alpha_2' + P_3 \sin \alpha_3' + \dots$$

ist, so ist ganz wie vorher:

$$\begin{aligned} 4) \quad & L'^2 + M'^2 \\ &= P_0^2 + P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 + P_4^2 + \dots \\ &\quad + 2P_0 P_1 \cos(P_0 P_1) + 2P_0 P_2 \cos(P_0 P_2) + 2P_0 P_3 \cos(P_0 P_3) \\ &\quad \quad \quad + 2P_0 P_4 \cos(P_0 P_4) + \dots \\ &\quad \quad \quad + 2P_1 P_2 \cos(P_1 P_2) + 2P_1 P_3 \cos(P_1 P_3) \\ &\quad \quad \quad + 2P_1 P_4 \cos(P_1 P_4) + \dots \\ &\quad \quad \quad + 2P_2 P_3 \cos(P_2 P_3) + 2P_2 P_4 \cos(P_2 P_4) + \dots \\ &\quad \quad \quad + 2P_3 P_4 \cos(P_3 P_4) + \dots \\ &\quad \quad \quad \text{u. s. w.} \end{aligned}$$

also nach 2):

$$L^2 + M^2 = L'^2 + M'^2,$$

und weil nun nach dem Obigen  $L^2 + M^2$  nicht verschwindet, so verschwindet auch  $L'^2 + M'^2$  nicht; so wie nach der Voraussetzung für das erste System, giebt es also auch für das zweite System eine nicht verschwindende Resultirende, wobei zugleich aus bekannten Formeln auf der Stelle erhellet, dass die Resultirenden der beiden Systeme einander gleich sind.

Die Gleichung der Richtungslinie der Resultirenden des ersten Systems ist bekanntlich:

$$5) \quad N_1 - Mx + Ly = 0,$$

wo:

$$6) \quad N_1 = \sum P(x \sin \alpha - y \cos \alpha)$$

auf belieb. Weise zu einer L. annehmen. Dann erhalten wir:

ist; und oben so ist die Gleichung der Richtungslinie resultierenden des zweiten Systems:

$$7) \dots \dots \dots N_1' - M'x + L'y = 0.$$

wo:

$$8) \dots \dots \dots N_1' = \sum P x \sin \epsilon - y \cos \epsilon$$

ist.

Bezeichnen wir nun die Coordinaten des Durchschnitts der Richtungslinien der Resultierenden der beiden System  $X, Y$ ; so haben wir zu deren Bestimmung nach 5) an beiden Gleichungen:

$$9) \dots \dots \dots \begin{cases} N_1 - MX + LY = 0. \\ N_1' - M'X + L'Y = 0; \end{cases}$$

also:

$$N_1L' - ML'X + LL'Y = 0.$$

$$LN_1' - LM'X + LL'Y = 0$$

und:

$$N_1M' - MM'X + LM'Y = 0.$$

$$MN_1' - MM'X + ML'Y = 0;$$

folglich durch Subtraction:

$$LN_1' - N_1L' - (LM' - ML')X = 0.$$

$$MN_1' - N_1M' - (LM' - ML')Y = 0;$$

folglich:

$$10) \dots \dots \dots X = \frac{LN_1' - N_1L'}{LM' - ML'}, \quad Y = \frac{MN_1' - N_1M'}{LM' - ML'};$$

oder, wenn wir der Kürze wegen:

$$11) \dots \dots \dots \begin{cases} U = LM' - ML', \\ V = LN_1' - N_1L', \\ W = MN_1' - N_1M' \end{cases}$$

setzen:

$$12) \dots \dots \dots X = \frac{V}{U}, \quad Y = \frac{W}{U};$$

wo wir uns nun mit der weiteren Entwicklung der  $U, V, W$  beschäftigen wollen.

Wenn man in die Gleichung

$$U = LM' - ML'$$

für  $L$ ,  $M$  und  $L'$ ,  $M'$  die Ausdrücke 1) und 3) einführt, so erhält man:

$$\begin{aligned} U = & (P_0 \cos \alpha_0 + P_1 \cos \alpha_1 + P_2 \cos \alpha_2 + P_3 \cos \alpha_3 + \dots) \\ & \times (P_0 \sin \alpha_0' + P_1 \sin \alpha_1' + P_2 \sin \alpha_2' + P_3 \sin \alpha_3' + \dots) \\ & - (P_0 \sin \alpha_0 + P_1 \sin \alpha_1 + P_2 \sin \alpha_2 + P_3 \sin \alpha_3 + \dots) \\ & \times (P_0 \cos \alpha_0' + P_1 \cos \alpha_1' + P_2 \cos \alpha_2' + P_3 \cos \alpha_3' + \dots), \end{aligned}$$

also, wenn man die Producte entwickelt und nach den Kräften ordnet:

$$\begin{aligned} U = & P_0^2 (\cos \alpha_0 \sin \alpha_0' - \sin \alpha_0 \cos \alpha_0') \\ & + P_1^2 (\cos \alpha_1 \sin \alpha_1' - \sin \alpha_1 \cos \alpha_1') \\ & + P_2^2 (\cos \alpha_2 \sin \alpha_2' - \sin \alpha_2 \cos \alpha_2') \\ & + P_3^2 (\cos \alpha_3 \sin \alpha_3' - \sin \alpha_3 \cos \alpha_3') \end{aligned}$$

u. s. w.

$$\begin{aligned} & + P_0 P_1 \left\{ \begin{array}{l} (\cos \alpha_0 \sin \alpha_1' - \sin \alpha_0 \cos \alpha_1') \\ + (\cos \alpha_1 \sin \alpha_0' - \sin \alpha_1 \cos \alpha_0') \end{array} \right\} \\ & + P_0 P_2 \left\{ \begin{array}{l} (\cos \alpha_0 \sin \alpha_2' - \sin \alpha_0 \cos \alpha_2') \\ + (\cos \alpha_2 \sin \alpha_0' - \sin \alpha_2 \cos \alpha_0') \end{array} \right\} \\ & + P_0 P_3 \left\{ \begin{array}{l} (\cos \alpha_0 \sin \alpha_3' - \sin \alpha_0 \cos \alpha_3') \\ + (\cos \alpha_3 \sin \alpha_0' - \sin \alpha_3 \cos \alpha_0') \end{array} \right\} \end{aligned}$$

u. s. w.

$$\begin{aligned} & + P_1 P_2 \left\{ \begin{array}{l} (\cos \alpha_1 \sin \alpha_2' - \sin \alpha_1 \cos \alpha_2') \\ + (\cos \alpha_2 \sin \alpha_1' - \sin \alpha_2 \cos \alpha_1') \end{array} \right\} \\ & + P_1 P_3 \left\{ \begin{array}{l} (\cos \alpha_1 \sin \alpha_3' - \sin \alpha_1 \cos \alpha_3') \\ + (\cos \alpha_3 \sin \alpha_1' - \sin \alpha_3 \cos \alpha_1') \end{array} \right\} \end{aligned}$$

u. s. w.

$$+ P_2 P_3 \left\{ \begin{array}{l} (\cos \alpha_2 \sin \alpha_3' - \sin \alpha_2 \cos \alpha_3') \\ + (\cos \alpha_3 \sin \alpha_2' - \sin \alpha_3 \cos \alpha_2') \end{array} \right\}$$

u. s. w.

u. s. w.

also:

$$U = P_0^2 \sin(\alpha_0' - \alpha_0)$$

$$+ P_1^2 \sin(\alpha_1' - \alpha_1)$$

$$+ P_2^2 \sin(\alpha_2' - \alpha_2)$$

$$+ P_3^2 \sin(\alpha_3' - \alpha_3)$$

u. s. w.

$$+ P_0 P_1 \{ \sin(\alpha_1' - \alpha_0) + \sin(\alpha_0' - \alpha_1) \}$$

$$+ P_0 P_2 \{ \sin(\alpha_2' - \alpha_0) + \sin(\alpha_0' - \alpha_2) \}$$

$$+ P_0 P_3 \{ \sin(\alpha_3' - \alpha_0) + \sin(\alpha_0' - \alpha_3) \}$$

u. s. w.

$$+ P_1 P_2 \{ \sin(\alpha_2' - \alpha_1) + \sin(\alpha_1' - \alpha_2) \}$$

$$+ P_1 P_3 \{ \sin(\alpha_3' - \alpha_1) + \sin(\alpha_1' - \alpha_3) \}$$

u. s. w.

$$+ P_2 P_3 \{ \sin(\alpha_3' - \alpha_2) + \sin(\alpha_2' - \alpha_3) \}$$

u. s. w.

u. s. w.

Zwei allgemeine Glieder dieses Ausdrucks sind;

$$P_x^2 \sin(\alpha_x' - \alpha_x)$$

und:

$$P_x P_\lambda \{ \sin(\alpha_\lambda' - \alpha_x) + \sin(\alpha_x' - \alpha_\lambda) \}$$

oder:

$$P_x P_\lambda \{ \sin(\alpha_x' - \alpha_\lambda) + \sin(\alpha_\lambda' - \alpha_x) \};$$

und weil nun nach §. 1. 6):

$$\sin(\alpha_x' - \alpha_x) = \sin \theta,$$

und nach §. 1. 13):

$$\sin(\alpha_x' - \alpha_\lambda) + \sin(\alpha_\lambda' - \alpha_x) = 2 \sin \theta \cos(P_x P_\lambda)$$

ist, so sind die beiden in Rede stehenden allgemeinen Glieder:

$$P_x^2 \sin \theta$$

und

$$2 P_x P_\lambda \sin \theta \cos(P_x P_\lambda).$$

Führt man jetzt die diesen allgemeinen Gliedern entsprechenden Ausdrücke in den obigen Ausdruck von  $U$  ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
13) \dots\dots\dots U \sin \theta^{-1} \\
= P_0^2 + P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 + P_4^2 + \dots \\
+ 2P_0 P_1 \cos(P_0 P_1) + 2P_0 P_2 \cos(P_0 P_2) + 2P_0 P_3 \cos(P_0 P_3) \\
+ 2P_0 P_4 \cos(P_0 P_4) + \dots \\
+ 2P_1 P_2 \cos(P_1 P_2) + 2P_1 P_3 \cos(P_1 P_3) \\
+ 2P_1 P_4 \cos(P_1 P_4) + \dots \\
+ 2P_2 P_3 \cos(P_2 P_3) + 2P_2 P_4 \cos(P_2 P_4) + \dots \\
+ 2P_3 P_4 \cos(P_3 P_4) + \dots \\
\text{u. s. w.}
\end{aligned}$$

Ferner ist:

$$\begin{aligned}
V = & (P_0 \cos \alpha_0 + P_1 \cos \alpha_1 + P_2 \cos \alpha_2 + P_3 \cos \alpha_3 + \dots) \\
& \times \{ P_0 (x_0 \sin \alpha_0' - y_0 \cos \alpha_0') + P_1 (x_1 \sin \alpha_1' - y_1 \cos \alpha_1') \\
& + P_2 (x_2 \sin \alpha_2' - y_2 \cos \alpha_2') + \dots \\
& - (P_0 \cos \alpha_0' + P_1 \cos \alpha_1' + P_2 \cos \alpha_2' + P_3 \cos \alpha_3' + \dots) \\
& \times \{ P_0 (x_0 \sin \alpha_0 - y_0 \cos \alpha_0) + P_1 (x_1 \sin \alpha_1 - y_1 \cos \alpha_1) \\
& + P_2 (x_2 \sin \alpha_2 - y_2 \cos \alpha_2) + \dots
\end{aligned}$$

also, wenn man die Producte entwickelt und wieder nach Kräften gehörig ordnet:

$$\begin{aligned}
V = & P_0^2 \{ \cos \alpha_0 (x_0 \sin \alpha_0' - y_0 \cos \alpha_0') - \cos \alpha_0' (x_0 \sin \alpha_0 - y_0 \cos \alpha_0) \\
& + P_1^2 \{ \cos \alpha_1 (x_1 \sin \alpha_1' - y_1 \cos \alpha_1') - \cos \alpha_1' (x_1 \sin \alpha_1 - y_1 \cos \alpha_1) \\
& + P_2^2 \{ \cos \alpha_2 (x_2 \sin \alpha_2' - y_2 \cos \alpha_2') - \cos \alpha_2' (x_2 \sin \alpha_2 - y_2 \cos \alpha_2) \\
& + P_3^2 \{ \cos \alpha_3 (x_3 \sin \alpha_3' - y_3 \cos \alpha_3') - \cos \alpha_3' (x_3 \sin \alpha_3 - y_3 \cos \alpha_3) \\
& \text{u. s. w.} \\
& + P_0 P_1 \left\{ \begin{array}{l} \cos \alpha_0 (x_1 \sin \alpha_1' - y_1 \cos \alpha_1') - \cos \alpha_0' (x_1 \sin \alpha_1 - y_1 \cos \alpha_1) \\ + \cos \alpha_1 (x_0 \sin \alpha_0' - y_0 \cos \alpha_0') - \cos \alpha_1' (x_0 \sin \alpha_0 - y_0 \cos \alpha_0) \end{array} \right. \\
& + P_0 P_2 \left\{ \begin{array}{l} \cos \alpha_0 (x_2 \sin \alpha_2' - y_2 \cos \alpha_2') - \cos \alpha_0' (x_2 \sin \alpha_2 - y_2 \cos \alpha_2) \\ + \cos \alpha_2 (x_0 \sin \alpha_0' - y_0 \cos \alpha_0') - \cos \alpha_2' (x_0 \sin \alpha_0 - y_0 \cos \alpha_0) \end{array} \right. \\
& + P_0 P_3 \left\{ \begin{array}{l} \cos \alpha_0 (x_3 \sin \alpha_3' - y_3 \cos \alpha_3') - \cos \alpha_0' (x_3 \sin \alpha_3 - y_3 \cos \alpha_3) \\ + \cos \alpha_3 (x_0 \sin \alpha_0' - y_0 \cos \alpha_0') - \cos \alpha_3' (x_0 \sin \alpha_0 - y_0 \cos \alpha_0) \end{array} \right. \\
& \text{u. s. w.}
\end{aligned}$$

$$+ P_1 P_2 \left\{ \begin{array}{l} \cos \alpha_1 (x_2 \sin \alpha_2' - y_2 \cos \alpha_2') - \cos \alpha_1' (x_2 \sin \alpha_2 - y_2 \cos \alpha_2) \\ + \cos \alpha_2 (x_1 \sin \alpha_1' - y_1 \cos \alpha_1') - \cos \alpha_2' (x_1 \sin \alpha_1 - y_1 \cos \alpha_1) \end{array} \right\}$$

$$+ P_1 P_3 \left\{ \begin{array}{l} \cos \alpha_1 (x_3 \sin \alpha_3' - y_3 \cos \alpha_3') - \cos \alpha_1' (x_3 \sin \alpha_3 - y_3 \cos \alpha_3) \\ + \cos \alpha_3 (x_1 \sin \alpha_1' - y_1 \cos \alpha_1') - \cos \alpha_3' (x_1 \sin \alpha_1 - y_1 \cos \alpha_1) \end{array} \right\}$$

u. s. w.

$$+ P_2 P_3 \left\{ \begin{array}{l} \cos \alpha_2 (x_3 \sin \alpha_3' - y_3 \cos \alpha_3') - \cos \alpha_2' (x_3 \sin \alpha_3 - y_3 \cos \alpha_3) \\ + \cos \alpha_3 (x_2 \sin \alpha_2' - y_2 \cos \alpha_2') - \cos \alpha_3' (x_2 \sin \alpha_2 - y_2 \cos \alpha_2) \end{array} \right\}$$

u. s. w.

u. s. w.

Betrachten wir nun wieder zwei allgemeine Glieder, so ist zuerst:

$$\begin{aligned} & \cos \alpha_x (x_x \sin \alpha_x' - y_x \cos \alpha_x') - \cos \alpha_x' (x_x \sin \alpha_x - y_x \cos \alpha_x) \\ &= x_x (\cos \alpha_x \sin \alpha_x' - \cos \alpha_x' \sin \alpha_x) = x_x \sin (\alpha_x' - \alpha_x), \end{aligned}$$

also nach §. 1. 6):

$$\cos \alpha_x (x_x \sin \alpha_x' - y_x \cos \alpha_x') - \cos \alpha_x' (x_x \sin \alpha_x - y_x \cos \alpha_x) = x_x \sin \theta.$$

Ferner ist:

$$\begin{aligned} & \cos \alpha_x (x_\lambda \sin \alpha_\lambda' - y_\lambda \cos \alpha_\lambda') - \cos \alpha_x' (x_\lambda \sin \alpha_\lambda - y_\lambda \cos \alpha_\lambda) \\ &+ \cos \alpha_\lambda (x_x \sin \alpha_x' - y_x \cos \alpha_x') - \cos \alpha_\lambda' (x_x \sin \alpha_x - y_x \cos \alpha_x) \\ &= x_x (\sin \alpha_x' \cos \alpha_\lambda - \sin \alpha_x \cos \alpha_\lambda') - y_x (\cos \alpha_x' \cos \alpha_\lambda - \cos \alpha_x \cos \alpha_\lambda') \\ &- x_\lambda (\cos \alpha_x' \sin \alpha_\lambda - \cos \alpha_x \sin \alpha_\lambda') + y_\lambda (\cos \alpha_x' \cos \alpha_\lambda - \cos \alpha_x \cos \alpha_\lambda'), \end{aligned}$$

also nach §. 1. 14), 15):

$$\begin{aligned} & \cos \alpha_x (x_\lambda \sin \alpha_\lambda' - y_\lambda \cos \alpha_\lambda') - \cos \alpha_x' (x_\lambda \sin \alpha_\lambda - y_\lambda \cos \alpha_\lambda) \\ &+ \cos \alpha_\lambda (x_x \sin \alpha_x' - y_x \cos \alpha_x') - \cos \alpha_\lambda' (x_x \sin \alpha_x - y_x \cos \alpha_x) \\ &= \{ (x_x + x_\lambda) \cos (P_x P_\lambda) - (y_x - y_\lambda) \sin (P_x P_\lambda) \} \sin \theta. \end{aligned}$$

Folglich ist:

$$14) \dots \dots \dots V \sin \theta^{-1}$$

$$\begin{aligned} &= P_0^2 x_0 + P_1^2 x_1 + P_2^2 x_2 + P_3^2 x_3 + P_4^2 x_4 + \dots \\ &+ P_0 P_1 \{ (x_0 + x_1) \cos (P_0 P_1) - (y_0 - y_1) \sin (P_0 P_1) \} \\ &+ P_0 P_2 \{ (x_0 + x_2) \cos (P_0 P_2) - (y_0 - y_2) \sin (P_0 P_2) \} \\ &+ P_0 P_3 \{ (x_0 + x_3) \cos (P_0 P_3) - (y_0 - y_3) \sin (P_0 P_3) \} \\ &+ P_0 P_4 \{ (x_0 + x_4) \cos (P_0 P_4) - (y_0 - y_4) \sin (P_0 P_4) \} \end{aligned}$$

u. s. w.







Setzen wir

$$\begin{aligned}
 16) \dots\dots\dots U' \\
 = & P_0^2 + P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 + P_4^2 + \dots \\
 & + 2P_0P_1\cos(P_0P_1) + 2P_0P_2\cos(P_0P_2) + 2P_0P_3\cos(P_0P_3) \\
 & \qquad\qquad\qquad + 2P_0P_4\cos(P_0P_4) + \\
 & \qquad\qquad\qquad + 2P_1P_2\cos(P_1P_2) + 2P_1P_3\cos(P_1P_3) \\
 & \qquad\qquad\qquad + 2P_1P_4\cos(P_1P_4) + \\
 & \qquad\qquad\qquad + 2P_2P_3\cos(P_2P_3) + 2P_2P_4\cos(P_2P_4) \\
 & \qquad\qquad\qquad + 2P_3P_4\cos(P_3P_4) - \\
 & \qquad\qquad\qquad \text{u. s. w.}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 17) \dots\dots\dots V' \\
 = & P_0^2x_0 + P_1^2x_1 + P_2^2x_2 + P_3^2x_3 + P_4^2x_4 + \dots \\
 & + P_0P_1\{(x_0+x_1)\cos(P_0P_1) - (y_0-y_1)\sin(P_0P_1)\} \\
 & + P_0P_2\{(x_0+x_2)\cos(P_0P_2) - (y_0-y_2)\sin(P_0P_2)\} \\
 & + P_0P_3\{(x_0+x_3)\cos(P_0P_3) - (y_0-y_3)\sin(P_0P_3)\} \\
 & + P_0P_4\{(x_0+x_4)\cos(P_0P_4) - (y_0-y_4)\sin(P_0P_4)\} \\
 & \qquad\qquad\qquad \text{u. s. w.} \\
 & + P_1P_2\{(x_1+x_2)\cos(P_1P_2) - (y_1-y_2)\sin(P_1P_2)\} \\
 & + P_1P_3\{(x_1+x_3)\cos(P_1P_3) - (y_1-y_3)\sin(P_1P_3)\} \\
 & + P_1P_4\{(x_1+x_4)\cos(P_1P_4) - (y_1-y_4)\sin(P_1P_4)\} \\
 & \qquad\qquad\qquad \text{u. s. w.} \\
 & + P_2P_3\{(x_2+x_3)\cos(P_2P_3) - (y_2-y_3)\sin(P_2P_3)\} \\
 & + P_2P_4\{(x_2+x_4)\cos(P_2P_4) - (y_2-y_4)\sin(P_2P_4)\} \\
 & \qquad\qquad\qquad \text{u. s. w.} \\
 & + P_3P_4\{(x_3+x_4)\cos(P_3P_4) - (y_3-y_4)\sin(P_3P_4)\} \\
 & \qquad\qquad\qquad \text{u. s. w.} \\
 & \qquad\qquad\qquad \text{u. s. w.}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 18) \dots\dots\dots W' \\
 = & P_0^2y_0 + P_1^2y_1 + P_2^2y_2 + P_3^2y_3 + P_4^2y_4 + \dots \\
 & + P_0P_1\{(x_0-x_1)\sin(P_0P_1) + (y_0+y_1)\cos(P_0P_1)\} \\
 & + P_0P_2\{(x_0-x_2)\sin(P_0P_2) + (y_0+y_2)\cos(P_0P_2)\} \\
 & + P_0P_3\{(x_0-x_3)\sin(P_0P_3) + (y_0+y_3)\cos(P_0P_3)\} \\
 & + P_0P_4\{(x_0-x_4)\sin(P_0P_4) + (y_0+y_4)\cos(P_0P_4)\} \\
 & \qquad\qquad\qquad \text{u. s. w.}
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
W' &= P_0^2 y_0 + P_1^2 y_1 + P_2^2 y_2 + P_3^2 y_3 + P_4^2 y_4 + \dots \\
&\quad + P_0 P_1 (y_0 + y_1) + P_0 P_2 (y_0 + y_2) + P_0 P_3 (y_0 + y_3) + \dots \\
&\quad + P_1 P_2 (y_1 + y_2) + P_1 P_3 (y_1 + y_3) + \dots \\
&\quad + P_2 P_3 (y_2 + y_3) + \dots \\
&\quad \text{u. s. w.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + \dots) \\
&\quad \times (P_0 y_0 + P_1 y_1 + P_2 y_2 + P_3 y_3 + \dots) \\
&= \Sigma P \cdot \Sigma P y;
\end{aligned}$$

also nach 19) in diesem Falle:

$$20) \dots \dots \dots X = \frac{\Sigma P x}{\Sigma P}, \quad Y = \frac{\Sigma P y}{\Sigma P};$$

was längst bekannt ist.

Weil die Grössen  $U'$ ,  $V'$ ,  $W'$  nach 16), 17), 18), und demzufolge nach 19) auch die Coordinaten  $X$ ,  $Y$ , von den Winkeln

$$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \dots$$

und von dem Winkel  $\theta$  ganz unabhängig sind, indem dieselben nur von den Kräften

$$P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, \dots$$

und der durch die Winkel

$$(P_0 P_1), (P_0 P_2), (P_0 P_3), \dots; (P_1 P_2), (P_1 P_3), \dots; (P_2 P_3), \dots; \dots$$

bestimmten gegenseitigen Lage der Richtungen derselben abhängen; so ist klar, dass bei allen Lagen, in welche das System durch Drehung in der aus dem Obigen bekannten Weise gebracht werden kann, die Richtungslinie der Resultirenden des Systems immer durch den Punkt  $(XY)$  geht, und dass man also diesen Punkt ganz mit demselben Rechte und in demselben Sinne, wie man von einem Mittelpunkte oder einem Centrum paralleler Kräfte zu sprechen pflegt, mit dem Namen:

**Mittelpunkt oder Centrum auf beliebige Weise sämmtlich in einer und derselben Ebene wirkende Kräfte**

belegen kann, wie in der Theorie paralleler Kräfte natürlich auch hier unter der Voraussetzung, dass sich die Kräfte auf ein Resultirende zurückführen lassen.

Von ausführlicheren literarischen Nachweisungen, namentlich



also wieder:

$$\cos(P_x P_\lambda) = \cos(P_x P_\lambda)', \quad \sin(P_x P_\lambda) = \sin(P_x P_\lambda)';$$

daher ist allgemein:

$$\cos(P_x P_\lambda) = \cos(P_x P_\lambda)', \quad \sin(P_x P_\lambda) = \sin(P_x P_\lambda)';$$

und man kann folglich in allen obigen Formeln, ohne deren Richtigkeit im Geringsten zu stören,  $(P_x P_\lambda)'$  für  $(P_x P_\lambda)$  setzen, alle durch  $(P_x P_\lambda)$  bezeichneten Winkel bloss von 0 bis  $180^\circ$  zählen wenn man dieselben nur nach der oben gegebenen Bestimmung gehörig positiv und negativ nimmt.

### A n m e r k u n g.

Es lag mir daran, die Richtigkeit der von mir entwickelten Ausdrücke für die Coordinaten  $X$ ,  $Y$  des Mittelpunkts der Kräfte in einfacher Weise praktisch zu prüfen. Deshalb entwarf ich Taf. VI. eine möglichst genaue Zeichnung für nur zwei einander gleiche und auf einander senkrecht stehende Kräfte  $P_0$  und  $P_1$ . In dieser leicht durch sich selbst verständlichen Zeichnung sind  $A_0$  und  $A_1$  die Angriffspunkte der Kräfte  $P_0$  und  $P_1$ , also:

$$A_0 = (x_0 y_0), \quad A_1 = (x_1 y_1);$$

die Richtungen der Kräfte  $P_0$  und  $P_1$  sind in den drei angenommenen verschiedenen Lagen des Systems durch die von  $A_0$  und  $A_1$  ausgehenden, mit Pfeilspitzen versehenen Geraden dargestellt, und durch einfache Construction hat sich als Mittelpunkt der Kräfte der Punkt  $M$  ergeben. Es ist also:

$$x_0 = +OB_0, \quad y_0 = +A_0B_0;$$

$$x_1 = +OB_1, \quad y_1 = -A_1B_1;$$

und:

$$X = +ON, \quad Y = +MN.$$

Ferner ist in diesem Falle offenbar

$$(P_0 P_1) = 270^\circ,$$

wenn wir die Winkel von 0 bis  $360^\circ$  zählen und bloss positive nehmen, also:

$$\cos(P_0 P_1) = 0, \quad \sin(P_0 P_1) = -1.$$

Weil wir die Kräfte  $P_0$  und  $P_1$  einander gleich angenommen

haben, so wollen wir für dieselben das gemeinschaftliche Zeichen  $P$  schreiben, und erhalten nun aus den Formeln §. 2. 16), 17), 18):

$$U' = 2P^2;$$

$$V' = \{x_0 + x_1 + (y_0 - y_1)\} P^2, \quad W' = \{y_0 + y_1 - (x_0 - x_1)\} P^2;$$

folglich nach §. 2. 19):

$$X = \frac{x_0 + x_1 + (y_0 - y_1)}{2}, \quad Y = \frac{y_0 + y_1 - (x_0 - x_1)}{2}.$$

Führen wir nun für  $x_0$ ,  $y_0$  und  $x_1$ ,  $y_1$  ihre obigen Werthe ein, so erhalten wir:

$$X = \frac{x_0 + x_1 + y_0 - y_1}{2} = \frac{OB_0 + OB_1 + A_0B_0 + A_1B_1}{2},$$

$$Y = \frac{y_0 + y_1 - x_0 + x_1}{2} = \frac{A_0B_0 - A_1B_1 - OB_0 + OB_1}{2};$$

oder:

$$X = + ON = \frac{OB_0 + OB_1 + A_0B_0 + A_1B_1}{2},$$

$$Y = + MN = \frac{OB_1 + A_0B_0 - OB_0 - A_1B_1}{2}.$$

Die in der Zeichnung ausgeführte Construction dieser Werthe hat nun das Richtige gegeben, so weit es bei der natürlich immer nur beschränkten Genauigkeit einer solchen Zeichnung möglich war.







Setzen wir nun voraus:

$$2) \dots \dots \dots \begin{aligned} x &= \xi - \eta \cos \varphi \\ y &= \eta \sin \varphi \end{aligned}$$

in die obige Gleichung

$$1) \dots f(x, y) = x^2 + y^2 + 2Cx + 2By + D = k$$

so übergeht sie in die Polargleichung der Ellipse

$$\xi^2 + \eta^2 + 2C\xi + 2B\eta + D = k$$

wenn wir setzen:

$$3) \dots \begin{cases} s = A \cos^2 \varphi + B \sin^2 \varphi + 2C \cos \varphi \sin \varphi \\ t = A\xi + C\eta + D = 0 \\ u = f(\xi, \eta) = A\xi^2 + B\eta^2 + 2C\xi + 2B\eta + D = k \end{cases}$$

Soll der Punkt  $\xi, \eta$  der Mittelpunkt der Ellipse sein, so muss für alle Werte des Parameter  $\varphi$  der Strahl  $r$  zwei entgegengesetzt gleiche Werte erhalten, nämlich

$$r = 0$$

sein. Dies gibt für  $\xi, \eta$  die beiden Gleichungen

$$4) \dots \dots \dots \begin{cases} A\xi + C\eta + D = 0 \\ C\xi + B\eta + E = 0 \end{cases}$$

und daraus erhält man für den Mittelpunkt der Ellipse die Coordinaten:

$$5) \dots \dots \dots \xi = \frac{CE - BD}{AB - C^2}, \quad \eta = \frac{CD - AE}{AB - C^2}$$

und zugleich ist die charakteristische Differenz  $AB - C^2 = \Delta^2$  positiv, wenn die obige Gleichung einer Ellipse angehören soll.

Die Polargleichung der Ellipse ist sonach, wenn der Pol in deren Mittelpunkt verlegt wird,

$$r^2 + u = K.$$

Für obigen Mittelpunkt  $\xi, \eta$  wird aber

$$\begin{aligned} u = f(\xi, \eta) &= (A\xi + C\eta + D)\xi + (C\xi + B\eta + E)\eta + D\xi + E\eta \\ &= D\xi + E\eta = \frac{AE^2 + BD^2 - 2CDE}{\Delta^2}, \end{aligned}$$

oder  $u = k$ , wenn wir abkürzend:

$$6) \dots\dots\dots \frac{AE^2 + BD^2 - 2CDE}{\Delta^2} = k$$

setzen. Schreiben wir diess in die vorige Polargleichung,  $s$  selbe nunmehr:

$$7) \dots\dots\dots sr^2 = K - k$$

und in ihr ist zufolge (3):

$$8) \dots\dots \left\{ \begin{array}{l} s = A \frac{1 + \cos 2\psi}{2} + B \frac{1 - \cos 2\psi}{2} + C \sin 2\psi \\ \quad = \frac{A + B}{2} + \frac{A - B}{2} \cos 2\psi + C \sin 2\psi. \end{array} \right.$$

Gehen wir nun darauf aus die Halbaxen  $a$ ,  $b$  der Ellipse finden, von denen  $a$  die längere sein soll; so ist

$$a = \text{Max. } r,$$

$$b = \text{Min. } r;$$

und für sie wird im ersten Falle:

$$s = \text{Min.} = s_1,$$

im zweiten Falle:

$$s = \text{Max.} = s_2.$$

Sonach sind wir darauf verwiesen, zuvörderst das Minimum und Maximum von  $s$  zu suchen, folglich obigen Ausdruck nach  $\psi$  zu differenziiiren. Diess giebt:

$$\frac{1}{2} \frac{ds}{d\psi} = -\frac{A-B}{2} \sin 2\psi + C \cos 2\psi,$$

und wenn wir  $\frac{ds}{d\psi} = 0$  setzen und die allgemeine Auflösung der Bestimmungsgleichung für  $\psi$  mit  $\alpha$  bezeichnen, erhalten wir

$$C \cos 2\alpha = \frac{A-B}{2} \sin 2\alpha = 0,$$

daher:

$$9) \dots\dots\dots \frac{\cos 2\alpha}{\frac{1}{2}(A-B)} = \frac{\sin 2\alpha}{C} = \frac{1}{\mp G},$$

wenn wir abkürzend setzen:

$$10) \dots\dots\dots \left( \frac{A-B}{2} \right)^2 + C^2 = G^2,$$

und  $G$  positiv annehmen.

Hiefür, wird gemäss (8), für  $\varphi = \alpha$ :

$$s = \frac{A+B}{2} + \frac{\left(\frac{A-B}{2}\right)^2 + C^2}{\mp G},$$

so:

$$s = \frac{A+B}{2} \mp G.$$

Nun sind bei der Ellipse jedenfalls  $A$  und  $B$  einstimmig, also positiv annehmbar,  $G$  ist ebenfalls positiv vorausgesetzt, mit-  
n gilt für  $G$  das obere oder untere Vorzeichen, je nachdem wir  
den kleinsten oder grössten Werth von  $s$ , d. i.  $s_1$  oder  $s_2$  verlangen.

Es ist nemlich:

$$11) \dots\dots\dots s_1 = \frac{A+B}{2} - G$$

der kleinste,

$$s_2 = \frac{A+B}{2} + G$$

der grösste Werth von  $s$ . Sonach verwandelt sich die Gleichung  
(7) in:

$$12) \dots\dots\dots \begin{cases} s_1 a^2 = K - k, \\ s_2 b^2 = K - k \end{cases}$$

und liefert die Längen der Halbaxen  $a$  und  $b$ .

Sei nun  $f$  der fragliche Flächeninhalt der Ellipse, so  
ist bekanntlich überhaupt  $f = \pi ab$ , also hier:

$$f = \pi \frac{K - k}{\sqrt{s_1 s_2}}.$$

Es ist aber:

$$\begin{aligned} s_1 s_2 &= \left(\frac{A+B}{2}\right)^2 - G^2 = \left(\frac{A+B}{2}\right)^2 - \left(\frac{A-B}{2}\right)^2 - C^2 \\ &= AB - C^2 = \Delta^2, \end{aligned}$$

daher wird:

$$13) \dots\dots\dots f = \pi \frac{K - k}{\Delta},$$

der auffällig einfache und doch allgemeinste Ausdruck der Fläche  
der Ellipse, in welchem man nur, weil  $f$  immer positiv gedacht  
wird, die Zahl  $\Delta = \sqrt{AB - C^2}$  mit  $K - k$  gleichstimmig zu neh-  
men hat.











$$\begin{aligned}\frac{\Delta^2}{h^2} &= h^2 \cos^2 \varepsilon + (g^2 - r^2) \sin^2 \varepsilon - 2gh \cos \varepsilon \sin \varepsilon \sin \varphi - g^2 \sin^2 \varepsilon \\ &= (h \cos \varepsilon - g \sin \varepsilon \sin \varphi)^2 - r^2 \sin^2 \varepsilon,\end{aligned}$$

folglich, wenn man den für  $\varepsilon = 0$  stattfindenden Kreisschnitt als nicht zur Frage gehörig, ausschliesst und somit noch von Null verschiedenen Faktor  $\sin^2 \varepsilon$  heraushebt

$$\frac{\Delta^2}{h^2 \sin^2 \varepsilon} = (h \cot \varepsilon - g \sin \varphi)^2 - r^2.$$

Dieser Unterschied  $\Delta^2 = AB - C^2$  wird nun für einen gewissen Winkel  $\varepsilon = \varepsilon_0$  zu Null, daher der Kegelschnitt eine Parabel als Grenzform der mit  $\varphi$  und  $\varepsilon$  wandelbaren Ellipsen; und findet für ihn die Bestimmungsgleichung:

$$(h \cot \varepsilon_0 - g \sin \varphi)^2 - r^2 = 0,$$

folglich:

$$\cot \varepsilon_0 = \frac{g \sin \varphi \pm r}{h}.$$

Dieser Winkel wird nun möglichst klein, daher seine Cotangens möglichst gross ausfallen, wenn  $\sin \varphi = +1$ , also  $\varphi = 90^\circ$ . Dann ist:

$$\cot \varepsilon_0 = \frac{g \pm r}{h},$$

und von diesen zwei als  $\varepsilon_0$  sich ergebenden spitzen Winkel der dem  $+r$  entsprechende der kleinere, daher hier allein Grenze der  $\varepsilon$  in Betracht kommende; deshalb nehmen wir verschieden den aus

$$\cot \varepsilon_0 = \frac{g+r}{h} = \frac{e+q}{f}$$

folgenden Winkel  $\varepsilon_0$  als oberste Grenze der möglichen Neigungswinkel  $\varepsilon$  an, so dass wir fortan

$$0 < \varepsilon < \varepsilon_0$$

bedingen.

Zur ferneren Abkürzung setzen wir:

$$h \cot \varepsilon = c,$$

und finden, wegen  $\cot \varepsilon > \cot \varepsilon_0$ ,

$$c > h \cot \varepsilon_0,$$

:

$$c > g + r.$$

so setzen wir in dem entstehenden Quotienten

$$\frac{\Delta^2}{h^2 r^2 \sin^2 \varepsilon} = \left( \frac{c - g \sin \varphi}{r} \right)^2 - 1$$

Potentiand

$$\frac{c - g \sin \varphi}{r} = v,$$

dem wir sogleich ersehen, dass, weil  $c > g + r$ , also:

$$v > \frac{r + g(1 - \sin \varphi)}{r} > 1 + \frac{g}{r}(1 - \sin \varphi),$$

it  $v$  positiv und  $> 1$  ist, der Unterschied  $v^2 - 1$  und somit  $\Delta^2$  jedenfalls positiv sich ergibt. Hiernach erhalten wir:

$$\Delta = hr \sin \varepsilon \sqrt{v^2 - 1},$$

ch immer für  $\sin \varepsilon > 0$ .

7.

Suchen wir jetzt den Flächeninhalt  $f$  der entstehenden so nach den Formeln (6) und (13) der I. Aufgabe

$$k = \frac{AE^2 + BD^2 - 2CDE}{\Delta^2},$$

$$f = \pi \frac{K - k}{\Delta};$$

iden wir:

$$k = \frac{AE^2}{\Delta^2} = \frac{h^2 r^2}{v^2 - 1} = + \text{ (positiv).}$$

$$K - k = \frac{v^2 - 2}{v^2 - 1} h^2 r^2,$$

die Fläche der Ellipse:

$$f = \frac{\pi r h}{\sin \varepsilon} \cdot \frac{v^2 - 2}{(v^2 - 1)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\pi r h}{\sin \varepsilon} \cdot \frac{(v + \sqrt{2})(v - \sqrt{2})}{(v^2 - 1)^{\frac{1}{2}}},$$

$$v = \frac{c - g \sin \varphi}{r}$$



Dieser Differentialquotient kann bei Eintritt eines grössten oder kleinsten Werthes von  $q$  und  $f$ , wegen  $v > 1$ , nur verschwinden, wenn

$$\cos \varphi = 0 \quad \text{oder} \quad v = 2$$

ist, von denen die erste Bedingung entweder  $\varphi = 90^\circ$  oder  $\varphi = 270^\circ$  heisst, so dass die schneidende Ebene durch die  $y_1$ -Axe hindurch geht und sohin auf dem Haupt-Axenschnitte  $z_1 x_1$  senkrecht steht.

Um noch entscheiden zu können, ob ein solcher äusserster Werth des  $q$  wirklich statt habe, bedürfen wir bekanntlich noch des zweiten Differentialquotienten von  $q$ , zu dessen Ermittlung wir jedoch vorerst noch den, nur die Veränderliche  $v$  enthaltenden und nie verschwindenden Faktor

$$\frac{g}{r} \cdot \frac{v(v+2)}{(v^2-1)^{\frac{1}{2}}} = V$$

setzen und dadurch

$$q = V(v-2) \cos \varphi$$

sehen. Wir finden sonach den zweiten Differentialquotienten:

$$q'' = \frac{d^2 q}{d\varphi^2} = - \left( \frac{dV}{dv} (v-2) + V \right) \frac{g}{r} \cos \varphi^3 - V(v-2) \sin \varphi,$$

und je nachdem er negativ oder positiv ausfällt, muss  $q$  und so auch  $f$  ein Maximum oder Minimum werden.

## 10.

I. Im ersten Falle, wo  $\varphi = 90^\circ$  ist, fällt die positive  $y$ -Axe der  $x$  auf die der  $y_1$ , es ist  $\sin \varphi = 1$ , die Hilfszahl  $v$  ergiebt in:

$$v_1 = \frac{c-g}{r},$$

die elliptische Durchschnitsfigur hat den Inhalt:

$$f_1 = \frac{\pi r h}{\sin \varepsilon} \cdot \frac{v_1^2 - 2}{(v_1^2 - 1)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\pi r h}{\sin \varepsilon} \cdot \frac{v_1 + \sqrt{2}}{v_1^2 - 1} \cdot \frac{v_1 - \sqrt{2}}{\sqrt{v_1^2 - 1}}.$$

oder ist hier:

$$V_1 = \frac{g}{r} \cdot \frac{v_1(v_1+2)}{(v_1^2-1)^{\frac{1}{2}}}, \quad q'' = -V_1(v_1-2),$$

und sonach sind  $v_1 - \sqrt{2}$ ,  $\sqrt{v_1^2 - 1}$ ,  $V_1$  gleichstimmig.

Nun sei:

a)  $v_1 > 2$ , so sind  $v_1 - 2$ ,  $v_1 - \sqrt{2}$  und somit auch  $V_1$  positiv, also ist  $q''$  negativ und deshalb  $f_1$  ein Maximum.

b) Sei  $v_1 < 2$  aber  $> \sqrt{2}$  also  $v_1 - 2$  negativ aber  $v_1 - \sqrt{2}$  positiv; so ist  $V_1$  positiv, also  $q''$  positiv und  $f_1$  ein Minimum.

c) Endlich sei  $v_1 < \sqrt{2} < 2$  aber immer noch  $> 1$ , so ist wohl  $v_1 - 2$  als auch  $v_1 - \sqrt{2}$  negativ, daher  $V_1$  und  $q''$  negativ, also  $f_1$  ein Maximum.

## 11.

II. Im zweiten Falle, wo  $\varphi = 270^\circ$  ist, fällt die positive Halbaxe der  $x$  auf die negative der  $y_1$ , es ist  $\sin \varphi = -1$ , Hilfszahl  $v$  übergeht in:

$$v_2 = \frac{c+g}{r} > 1 + 2\frac{g}{r},$$

und die Ellipse hat den Inhalt:

$$f_2 = \frac{\pi r h}{\sin \varepsilon} \cdot \frac{v_2^2 - 2}{(v_2^2 - 1)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\pi r h}{\sin \varepsilon} \cdot \frac{v_2 + \sqrt{2}}{v_2^2 - 1} \cdot \frac{v_2 - \sqrt{2}}{\sqrt{v_2^2 - 1}}.$$

Ferner ist:

$$V_2 = \frac{g}{r} \cdot \frac{v_2(v_2 + 2)}{(v_2^2 - 1)^{\frac{1}{2}}},$$

und:

$$q'' = V_2(v_2 - 2);$$

daher sind  $v_2 - \sqrt{2}$ ,  $\sqrt{v_2^2 - 1}$ ,  $V_2$  immer gleichstimmig.

Nun sei:

$\alpha$ )  $v_2 > 2$ , so sind  $v_2 - 2$ ,  $v_2 - \sqrt{2}$  und  $V_2$  positiv, also ist  $q''$  positiv und somit  $f_2$  ein Minimum.

$\beta$ ) Sei  $v_2 < 2$  aber noch  $> \sqrt{2}$ , so ist  $v_2 - 2$  negativ, gegen  $v_2 - \sqrt{2}$  und damit auch  $V_2$  positiv, also  $q''$  negativ,  $f_2$  ein Maximum.

$\gamma$ ) Endlich sei  $v_2 < \sqrt{2} < 2$ , so ist  $v_2 - 2$  und  $v_2 - \sqrt{2}$ , auch  $V_2$  negativ und sonach  $q''$  positiv, daher  $f_2$  ein Minimum.

## 12.

III. Bestimmung der nach der Zusammenfassung der beiden Fälle, indem wir ...

$$r_2 - r_1 = \pm \frac{g}{r} = + \text{ oder } - \text{ je nach } r_2 > r_1 \text{ oder } r_2 < r_1$$

1) in I. a. der ... ist für ... ein Maximum und ...

2) Wie in I. b. ... ist ein Minimum ...

3) Endlich sei wie in I. c. die Zahl ... ein Maximum, dann ist aus ...

## 13.

IV. Verschwindet endlich der Differentialquotient  $q'$ , weil  $= 2$  wird, so wird  $V = 8 \frac{g}{r}$ , und die Fläche der Ellipse:

$$f_2 = \frac{2\pi \cdot h}{3\sqrt{3} \cdot \sin \epsilon}$$

Bei wird  $q'' = -2(\frac{2g}{r} \cos \varphi)^2$  immer negativ, mithin wäre  $f_2$  ebenfalls ein Maximum.

Den zugehörigen Streichungswinkel  $\varphi$  findet man aus der Bedingungsgleichung:

$$v = \frac{c - g \sin \varphi}{r} = 2,$$

hier, wenn man den ihr genügenden spitzen Winkel mit  $\varphi'$  bezeichnet, ist:

$$\sin \varphi' = \sin (180^\circ - \varphi') = \frac{c-2r}{g}.$$

Dieser Bruch muss jedoch positiv und  $< 1$  ausfallen, daher:

$$c > 2r, \text{ aber } c < 2r + g$$

sein. Da nun:

$$\cot \varepsilon = \frac{c}{h}$$

ist, so muss:

$$\cot \varepsilon > \frac{2r}{h}, \text{ aber } < \frac{2r+g}{h}$$

sein. Derlei möglich grösste Schnitte unter den Streichungswinkeln  $\varphi'$  und  $180^\circ - \varphi'$  könnten sich demnach nur ergeben, wenn der Neigungswinkel  $\varepsilon$  durch die letzteren zwei Ungleichungen eingeengt wäre. Der ersteren Ungleichung genügt unsere in Artikel 6 gestellte Bedingung  $\cot \varepsilon > \frac{g+r}{h}$ , wirklich dann, wenn  $g > r$ , d. i., wenn die Projektion des Kegelmittelpunktes ausserhalb des Grundkreises dessen Ebene trifft.

Nehmen wir den Winkel  $\varphi$  zwischen  $180^\circ$  und  $360^\circ$  und setzen wir  $\varphi = 180^\circ + \omega$ , so erstreckt sich  $\omega$  von 0 bis  $180^\circ$  und es ist:

$$\sin \varphi = -\sin \omega,$$

daher:

$$v = \frac{c + g \sin \omega}{r},$$

und wegen:

$$c = 2r + g \sin \varphi' \quad \text{auch} \quad v = 2 + \frac{g}{r} (\sin \omega + \sin \varphi') > 2.$$

Sonach kann nur im ersten gestreckten Winkel von  $\varphi$ , nicht aber im zweiten  $v =$  oder  $< 2$  werden. Ferner ist bei  $\varphi = 90^\circ$  die

$$v = v_1 = \frac{c-g}{r} = 2 - \frac{g}{r} (1 - \sin \varphi'), \text{ also } v_1 < 2.$$

Da sich aber hieraus nicht ersehen lässt, ob  $v_1 >$  oder  $< \sqrt{2}$  sei, so kann man (vermöge l. b) c)) nicht wissen, ob hier  $f_1$  ein Maximum oder Minimum sei.

Dagegen ist für  $\varphi = 270^\circ$  die  $v = v_2 = \frac{c+g}{r} = 2 + \frac{g}{r} (1 + \sin \varphi)$  also  $v_2 > 2$  und sonach  $f_2$  ein Minimum.





anfangs (bei  $\varphi=0$ ) positiv, für  $\varphi=\varphi'$  und  $v-2=0$  aber Null, also für  $\varphi=\varphi'$  bis  $\varphi=90^\circ$  negativ, wo er abermals Null wird. Er geht demnach zuerst aus dem Positiven durch Null in's Negative, dann umgekehrt; dort also muss  $q$  und mit ihr  $f$  seinen grössten, hier einen kleinsten Werth erhalten. — Setzt man diese Betrachtungen fort, so findet man folgende Zusammenstellung:

I. Von  $\varphi=0$  bis  $\varphi=180^\circ$ .

$$\begin{array}{l} \varphi = 0 \dots \varphi' \dots 90^\circ \dots 180^\circ - \varphi' \dots 180^\circ \\ v-2 = + \dots + \dots \overset{+}{0} \dots - \dots - (\text{Min.}) \dots - \dots \overset{-}{0} \dots + \dots + \\ \frac{dq}{d\varphi} = + \dots + \dots \overset{+}{0} \dots - \dots - \dots \overset{-}{0} \dots + \dots \overset{+}{0} \dots - \dots - \\ q \text{ und } f = \dots \text{Max.} \dots \text{Min.} \dots \text{Max.} \dots \end{array}$$

II. Von  $\varphi=180^\circ$  bis  $\varphi=360^\circ$ .

$$\begin{array}{l} \varphi = 180^\circ \dots 270^\circ \dots 360^\circ - \varphi' \\ v-2 = + \dots + \dots + \dots + \dots + \\ \frac{dq}{d\varphi} = - \dots - \dots \overset{-}{0} \dots + \dots + \\ q \text{ und } f = \dots \text{Min.} \dots \end{array}$$

Hieraus erhellt sonach, dass wofern

$$2r + g > c > 2r,$$

also

$$\frac{2r + g}{h} > \cot \epsilon > \frac{2r}{h}$$

ist, der erste Differentialquotient  $\frac{dq}{d\varphi}$  anstandslos Auskunft über den regelrechten Wechsel der zwei Maxima und zwei Minima der  $q$  und  $f$  gibt.

Prag, 30. Oktober 1866.

## XVI.

# **Zur Integration einer Differentialgleichung erster Ordnung mittelst Aufsteigen zu höherer (zweiter) Ordnung.**

Von

Herrn Professor Dr. *J. Dienger*  
am Polytechnikum in Carlsruhe.

### I.

**Sei**

$$f(x, y, y') = 0, \quad . . . . . (1)$$

**wo**  $y' = \frac{dy}{dx}$ , die vorgelegte Differentialgleichung erster Ordnung, aus der durch Differenzirung erhalten wird:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial f}{\partial y'} y'' = 0, \quad . . . . . (2)$$

**wo**  $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$ . Aus (2) ergebe sich, indem man nöthigenfalls (1) damit verbindet:

$$F(x, y, y', y'') = 0, \quad . . . . . (3)$$

**eine Differentialgleichung, deren allgemeines Integral die Gleichung**

$$\varphi(x, y, a, b) = 0 \quad . . . . . (4)$$

**sei, wo**  $a, b$  zwei willkürliche Konstanten bedeuten. Zieht man aus (4):

$$y = \psi(x, a, b), \quad . . . . . (5)$$

**so genügt selbstverständlich dieser Werth von**  $y$  **der** (3) **identisch, und es gibt keine andere Funktion, welche, an die Stelle von**  $y$  **gesetzt, dieser Gleichung identisch Genüge leisten kann.**



erster Ordnung mit der Bedingung  $f(x, y, y') = 0$  zu einer zweiten Ordnung  $f_1(x, y, y') = 0$ .

$$f(x, y, y') = 0. \quad \text{w. z. z. } f_1(x, y, y') = \left( \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} y' \right) = 0 \quad (8)$$

benfalls zu der Integrationsgleichung von (1) zu einer zweiten Ordnung mit der Bedingung  $f_1(x, y, y') = 0$  zu einer zweiten Ordnung  $f_2(x, y, y') = 0$  führt. Wenn die Elimination von  $y'$  in (8) führt zu der fraglichen Integrationsgleichung  $f_1(x, y, y') = 0$ , dann kann man die (8) auch schreiben

$$f(x, y, y') = 0 \quad \text{w. z. z. } f_1(x, y, y') = 0 \quad (9)$$

und die Elimination von  $y'$  führt immer noch zu der Integrationsgleichung  $f_1(x, y, y') = 0$ . Die erste dieser Gleichungen ist aber das Ergebnis der Elimination von  $y'$  zwischen (1) und (8), indem die letztere auch  $f_1(x, y, y') = 0$  enthält, was unsere Behauptung setzt.

## II

Eliminiert man etwa  $y'$  zuerst aus (1) und (2) mittels (10) so kann  $y'$  aus der so erhaltenen Gleichung mit (11) eliminiert werden. Man erhält man natürlich immer noch die Integrationsgleichung  $f_1(x, y, y') = 0$ . Die aus dieser Elimination resultierende Gleichung hat die Bedeutung einer ersten Integrationsgleichung von (1) und es folgt hieraus, dass wenn man eine zweite Integrationsgleichung von (3) (mit  $x, y, y'$  und einer Konstanten  $c$  statt  $a$ ) mit der Elimination von  $y'$  zwischen (1) und (2) eliminiert, so erhält man die Integrationsgleichung von (1) erhält.

Welche der zwei Konstanten man zwischen (1) und (2) eliminiert, ist ganz gleichgültig. Wenn man diese beiden Gleichungen:

$$a = \Phi(x, y), \quad b = \Phi_1(x, y) \quad (12)$$

genügen natürlich diese Größen der Bedingung  $f_1(x, y, y') = 0$ . Man hat eine Gleichung zwischen  $\Phi, \Phi_1$ , wenn man die Integrationsgleichungen (12) als Integrationsgleichungen von (1) erhält, werden dürfen.

Welches folglich auch diejenige der zwei möglichen, ersten Integrationsgleichungen von (3) sei, die man in dem zu Anfang dieses Paragraphen angegebenen Verfahren benutzt, ist gleichgültig.

## IV.

Gesetzt, es seien die Gleichungen



## XVII.

**Elementar-geometrischer Beweis des Satzes: Die Kegelschnitte werden von den in den Kegel gelegten Kugeln in ihren Brennpunkten berührt.**

Von

Herrn Dr. *F. C. Fresenius*,

Lehrer an der höheren Bürgerschule in Frankfurt a. M.

### I. Für die Parabel. (Taf. VII. Fig. 3.)

*cbn* sei Durchschnitt des Kegels durch die Achse, *dto* Durchschnitt der hineingelegten Kugel, *so* || *bn*, *cn* senkrecht zur Kegelschse *bm*, *io* ⊥ *cn* und *so*, also ist der Durchschnitt der Ebene *ios* mit der Kegeloberfläche die Parabel *is*.

Es ist zu heweisen, dass *o* Brennpunkt derselben ist.

$1) \quad co:ct = ct:cu$ $\frac{cu = no}{ct^2 = co \cdot no}$	$2) \quad co:oi = oi:on$ $\frac{oi^2 = co \cdot on}{oi = ct}$	$3) \quad sc:so = bc:bn = 1:1$ $\frac{so = st}{sc + st = ct = 2 \cdot so}$ $oi = 2 \cdot so$
---	---	--

Wo aber bei der Parabel die Ordinate gleich doppelter Abscisse ist, da ist der Brennpunkt. Also ist der Berührungspunkt der Kugel Brennpunkt der Parabel.

### II. Für die Ellipse. (Taf. VII. Fig. 4.)

Die Figur zeigt wieder den Achsenschnitt durch Kegel und beide Kugeln, welche die Ebene der Ellipse berühren. *sp* ist Durchschnitt dieser auf *pbg* senkrecht stehenden Ebene, also zugleich grosse Achse der Ellipse. Es ist zu beweisen, dass die Berührungspunkte *o* und *u* die Brennpunkte der Ellipse sind.

$ms = mp$ ;  $mw$ ,  $nc$ ,  $hs$  und  $pq$  senkrecht gegen die Kegelschn.

1)  $co:ct = ct:cf$

$$\frac{cf = on}{ct^2 = co \cdot on}$$

$ct =$  Ordinate des Kreises, dessen Durchmesser  $cn$  ist, in  $o$ ;

$ct =$  Ordinate in  $o$  für die Ellipse, deren gr. Achse  $= sp$ .

2)  $\angle xsk = 90^\circ$  und  $\angle xpk = 90^\circ$  (gebildet von den Hülfs-  
 $\angle usk = \angle sxo$   $\angle xpo = \angle pku$  birungslinien zweier  
 $\Delta usk \sim \Delta sxo$   $\Delta xpo \sim \Delta pku$  Nebenwinkel)

$$\frac{us:uk = xo:os}{us \cdot os = uk \cdot xo}$$

$$\frac{po:xo = uk:pu}{po \cdot pu = uk \cdot xo}$$

$$us \cdot os = uk \cdot xo$$

$$po \cdot pu = uk \cdot xo$$

$$\frac{us:pu = po:os}{us:us + pu = po:po + os}$$

$$d. h. \frac{us:ps = po:ps}{\frac{us = po}{pu = os}}$$

$$d. h. \frac{us:ps = po:ps}{\frac{us = po}{pu = os}}$$

$$\frac{us = po}{pu = os}$$

$$pu = os$$

3)  $\frac{ms = mp}{mo = mu}$

4)  $\frac{po = pd = qt}{so = pu = st}$   
 $uo = sq$

5)  $\frac{sm:sp = sw:sq}{sm = \frac{1}{2}sp}$   
 $sw = \frac{1}{2}sq = om = m$

6)  $\frac{so:sc = sm:sw}{so:so + sc = sm:sm + sw}$   
 $so + sc = ct$   
 $sm + sw = su$   
 $\frac{so \cdot su = ct \cdot sm}{su = op}$   
 $so \cdot op = ct \cdot sm$

7)  $so = sm - om$   
 $sm$  heisse  $a$  (grosse Halbachse)  
 $so = a - om$   
 $op = a + om$   
 $\frac{so \cdot op = (a - om)(a + om)}{= a^2 - om^2}$

8)  $tc$  (Ord. in  $o$ )  $= \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - om^2}$   
 $ct \cdot sm = b \sqrt{a^2 - om^2}$

9)  $\frac{so \cdot op = ct \cdot sm}{a^2 - om^2 = b \sqrt{a^2 - om^2}}$   
 $\frac{(a^2 - om^2)^2 = b^2 (a^2 - om^2)}{a^2 - om^2 = b^2}$   
 $\frac{om^2 = a^2 - b^2 = e^2}{om = e = mu.} \quad (e = \text{Excentricität})$

Also sind  $o$  und  $u$  die Brennpunkte.

### III. Für die Hyperbel. (Taf. VII. Fig. 5.)

Die Voraussetzungen sind denen des vorigen Beweises ganz analog.  $on, wm, pq \perp$  zur Achse,  $sm = mp$ . Die Berührungspunkte  $o$  und  $u$  sind als die Brennpunkte zu erweisen.

1)  $co:ct = ct:on$

$ct =$  Ordinate in  $o$  für den Kreis  $cn$  und die Hyperbel  $ou$ .

2)  $\frac{\Delta xso \sim \Delta sku}{os:ox = ku:us}$  und  $\frac{\Delta xop \sim \Delta puk}{op:ox = ku:up}$   
 $\frac{os.us = ox.ku}{op.up = ox.ku}$

$os:op = up:us$

$os:op - os = up:us - up$

d. h.  $os:sp = up:sp$

3)  $os = up$  und da  $sm = mp$   
 $om = mu$

4)  $po = pd = qt$   
 $so = pu = ts$   
 $uo = sq$

5)  $sm:sp = sw:sq$   
 $sm = \frac{1}{2}sp$   
 $sw = \frac{1}{2}sq = om = mu$

$so:sc = sm:sw$   
 $so:so + sc = sm:sm + sw$   
 $so + sc = ct$   
 $sm + sw = su$   
 $so.su = ct.sm$   
 $su = op$   
 $so.op = ct.sm$

7)  $so = om - sm$   
 $sm = a$  (Halbachse)  
 $so = om - a$   
 $op = om + a$   
 $so.op = (om - a)(om + a)$   
 $= om^2 - a^2$

8)  $tc$  (Ord. in  $o$ )  $= \frac{b}{a} \sqrt{om^2 - a^2}$   
 $ct.sm = b \sqrt{om^2 - a^2}$

9)  $so.op = ct.sm$   
 $om^2 - a^2 = b \sqrt{om^2 - a^2}$   
 $(om^2 - a^2)^2 = b^2(om^2 - a^2)$   
 $om^2 - a^2 = b^2$   
 $om^2 = a^2 + b^2 = e^2$   
 $om = e = mu.$

Also sind  $o$  und  $u$  die Brennpunkte.



**XVIII.****Uebungsaufgaben für Schüler.**

Es ist:

$$4a_1 a_2 = (a_1 + a_2)^2 - (a_2 - a_1)^2,$$

$$24a_1 a_2 a_3 = (a_1 + a_2 + a_3)^2 - (a_1 + a_2 - a_3)^2 - (a_1 + a_3 - a_2)^2 - (a_2 + a_3 - a_1)^2$$

$$\begin{aligned} 192a_1 a_2 a_3 a_4 = & (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)^2 \\ & - (a_1 + a_2 + a_3 - a_4)^2 \\ & - (a_1 + a_2 + a_4 - a_3)^2 \\ & - (a_1 + a_3 + a_4 - a_2)^2 \\ & - (a_2 + a_3 + a_4 - a_1)^2 \\ & + (a_2 + a_3 - a_4 - a_1)^2 \\ & + (a_2 + a_4 - a_3 - a_1)^2 \\ & + (a_3 + a_4 - a_2 - a_1)^2. \end{aligned}$$

Ein allgemeines Gesetz, unter welchem diese Formeln besondere Fälle enthalten sind, hat Herr Professor Tardy Genua in den „Annali di scienze matematiche e fisiche compilati da Barnaba Tortolini. Tomo Secondo. Roma 1851. p. 287.“ bewiesen.

Es ist, wie sich durch Entwicklung des Quadrats leicht gemein nachweisen lässt:

$$\begin{aligned} & (1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n)^2 \\ = & \left\{ \begin{aligned} & 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots + (n-2)x^{n-3} + (n-1)x^{n-2} + n \\ & \quad + (n+1)x^n \\ & + nx^{n+1} + (n-1)x^{n+2} + (n-2)x^{n+3} + \dots + 3x^{2n-2} + 2x^{2n-1} + 1 \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

und weil nun

$$(1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n)^2 = \left( \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \right)^2$$

ist, so ist auch:

$$\left( \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \right)^2 = \left\{ \begin{array}{l} 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots + (n-2)x^{n-2} + (n-1)x^{n-1} + nx^n \\ + nx^{n+1} + (n-1)x^{n+2} + (n-2)x^{n+3} + \dots + 3x^{2n-2} + 2x^{2n-1} + x^{2n}. \end{array} \right.$$

Jede durch die gerade Linie, welche die Mittelpunkte zweier inander gegenüberstehenden Seiten eines Tetraeders mit einander verbindet, gelegte Ebene theilt das Tetraeder in zwei einander gleiche Theile.

In der Ebene eines gewöhnlichen Vierecks den Punkt zu bestimmen, dessen Entfernungen von den vier Ecken des Vierecks, in die zwei den entsprechenden Ecken gegenüberstehenden Seiten multiplicirt, gleiche Producte geben.

### **L e h r s a t z.**

In Taf. III. Fig. 16. seien aus den Punkten  $C$  und  $C'$  mit gleichen Halbmessern zwei Kreise beschrieben, von denen jeder durch den Mittelpunkt des anderen geht. Die Durchschnittspunkte der Centrallinie dieser beiden Kreise mit ihren Peripherieen seien  $O$  und  $O'$ . In einem beliebigen Punkte  $T$  der Peripherie des um  $O$  beschriebenen Kreises ziehe man an denselben eine Berührende, fälle von dem Punkte  $O$  auf diese Berührende ein Perpendikel  $OM$ , und ziehe  $CM$  und  $CT$ ; so ist der Winkel  $MCO'$  dreimal so gross als der Winkel  $TCO'$ .

Diesen Satz hat Herr Professor Cesare Toscani in Siena in den „Annali di Scienze matematiche e fisiche, compilati da Barnaba Tortolini. Tomo Terzo. Roma. 1852. S. 276“ bewiesen, und zur Trisection des Winkels angewandt.

## XIX.

## M i s c e l l e n.

In Thl. XXXIX. S. 479. habe ich bewiesen, dass

$$a^3 + (a+d)^3 + (a+2d)^3 + \dots + (a+nd)^3 \\ = \frac{\{(a+(n+1)d)(a+nd)\}^2 - \{a(a-d)\}^2}{4d}$$

ist, und will hier nachträglich bemerken, dass diese Summe sich noch in zweckmässiger Weise transformiren lässt. ist nämlich:

$$\{(a+(n+1)d)(a+nd)\}^2 - \{a(a-d)\}^2 \\ = \{(a+(n+1)d)(a+nd) + a(a-d)\} \{(a+(n+1)d)(a+nd) - a(a-d)\}$$

aber, wie man leicht findet:

$$(a+(n+1)d)(a+nd) + a(a-d) = 2a^2 + 2nad + n(n+1)d^2 \\ = \frac{4a^2 + 4nad + n^2d^2 + 2n(n+1)d^2 - n^2d^2}{2} \\ = \frac{(2a+nd)^2 + n(n+2)d^2}{2}$$

und

$$(a+(n+1)d)(a+nd) - a(a-d) = (n+1)d(2a+nd);$$

also nach dem Obigen:

$$a^3 + (a+d)^3 + (a+2d)^3 + \dots + (a+nd)^3 \\ = \frac{(n+1)(2a+nd)\{(2a+nd)^2 + n(n+2)d^2\}}{8}.$$





da nach dem ersten Theorem die drei ersten Paare von Parallelen die Seiten dieser Parallelogramme bilden, so liegen die drei ersten Paare von Schnittpunkten in gerader Linie.

$$H \cdot I = J \cdot K$$

$$H \cdot I = J \cdot K$$

$$H \cdot I = J \cdot K$$

Da das Produkt der ersten vier Seiten eines Parallelogramms gleich dem der zweiten ist, so ist auch das Produkt der ersten vier Seiten gleich dem der dritten, usw.

$$H \cdot I \cdot J \cdot K = L \cdot M \cdot N \cdot O$$

Nach der Construction des Theorems liegt die Gerade durch die Punkte Z, Y, X in gerader Linie.

Betrachte ich noch die beiden ersten Paare von Parallelen  $AB \parallel CD$  und  $AC \parallel BD$ , zusammen mit dem dritten  $AD \parallel BC$  als ein Parallelogramm, so liegen die Punkte E, F, G der beiden ersten Paare von Parallelen zugehörigen Viereckswerte  $AE \cdot BF \cdot CG$  in gerader Linie.

Es liegen also alle vier Schnittpunktpaare in einer einzigen geraden Linie.

Der vorstehende Beweis beruht auf der ersten Theorem, die an die Spitze der Lehre von der Teilung einer Geraden, dem Satze des Menelaus und der Umkehrung dieses Satzes. Der Satz selbst dreht sich um die einfachsten Begriffe der Geometrie schon im geometrischen Anschauungsunterricht als Probe exacter Zeichnung dienen. Für eine einmalige Behandlung derselben im Unterricht — zu dem Zwecke, ermittelbar nach dem Menelaus und dessen Umkehrung eine Anwendung folgen zu lassen, die den Nutzen dieses Satzes ins Licht stellt. — würde es gerathen sein, den Beweis zu theilen, so dass der an sich schon merkwürdige Satz, der den Kern des Beweises bildet, etwa in folgender Fassung voranginge:

Durchschneiden sich drei Paar Parallelen und liegen drei Schnittpunkte, die sämmtlichen sechs Linien angehören, in gerader Linie, so liegen auch diejenigen drei Schnittpunkte, welche zu den ersteren die Gegenecken der Parallelogramme bilden, in gerader Linie.













über das Viereck und das Vierseit aufstellen lassen, wie schon ihre Herleitung ergibt, insofern der Durchschnittspunkt zweier Geraden in der Ebene nicht nothwendig die Projektion des Durchschnittspunktes im Raume der projecirten Geraden ist.

---

### Bemerkung über die Berechnung des Flächeninhalts geradliniger Figuren durch Trapezia.

Von dem Herausgeber.

Vielleicht mögen die folgenden einfachen Bemerkungen über die bei geodätischen Rechnungen so oft vorkommende Berechnung des Flächeninhalts geradliniger Figuren durch Trapezia nicht ganz ohne Interesse sein.

In Taf. III. Fig. 11. seien  $AA'$  und  $BB'$  auf verschiedenen Seiten von  $AB$  auf dieser Geraden senkrecht, und hierauf werde  $A'B'$  gezogen. Dann ist:

$$2(\Delta ACA' - \Delta BCB') = AA' \cdot AC - BB' \cdot BC;$$

oder:

$$AA' : BB' = AC : BC$$

oder:

$$AA' \cdot BC = BB' \cdot AC,$$

also:

$$\begin{aligned} 2(\Delta ACA' - \Delta BCB') &= AA' \cdot AC + AA' \cdot BC - BB' \cdot AC - BB' \cdot BC \\ &= AA' \cdot (AC + BC) - BB' \cdot (AC + BC) \\ &= (AA' - BB') (AC + BC), \end{aligned}$$

und folglich:

$$1) \dots 2(\Delta ACA' - \Delta BCB') = (AA' - BB') \cdot AB,$$

oder:

$$2) \dots 2(\Delta BCB' - \Delta ACA') = (BB' - AA') \cdot AB.$$

In Taf. III. Fig. 12. ist nun, wenn durch die Figur

*abcdefaßyðz,*

deren Flächeninhalt wir durch  $F$  bezeichnen wollen, die beliebige Axe  $MN$  gelegt ist, und von den Ecken der Figur auf dieselbe wie gewöhnlich Perpendikel gefällt worden sind:

$$\begin{aligned}
2F = & (aa' + bb') \cdot a'b' + (\alpha\alpha' + \beta\beta') \cdot \alpha'\beta' \\
& + (bb' + cc') \cdot b'c' + (\beta\beta' + \gamma\gamma') \cdot \beta'\gamma' \\
& + (cc' + dd') \cdot c'd' + (\gamma\gamma' + \delta\delta') \cdot \gamma'\delta' \\
& + (dd' + ee') \cdot d'e' + (\delta\delta' + \varepsilon\varepsilon') \cdot \delta'\varepsilon' \\
& + (ee' + ff') \cdot e'f' \\
& + 2(\Delta ama' - \Delta \alpha m \alpha') + 2(\Delta \varepsilon n \varepsilon' - \Delta f n f'),
\end{aligned}$$

also nach 1) oder 2):

$$\begin{aligned}
3) \dots 2F = & (aa' + bb') \cdot a'b' + (\alpha\alpha' + \beta\beta') \cdot \alpha'\beta' \\
& + (bb' + cc') \cdot b'c' + (\beta\beta' + \gamma\gamma') \cdot \beta'\gamma' \\
& + (cc' + dd') \cdot c'd' + (\gamma\gamma' + \delta\delta') \cdot \gamma'\delta' \\
& + (dd' + ee') \cdot d'e' + (\delta\delta' + \varepsilon\varepsilon') \cdot \delta'\varepsilon' \\
& + (ee' + ff') \cdot e'f' \\
& + (aa' - \alpha\alpha') \cdot \alpha'a' + (\varepsilon\varepsilon' - ff') \cdot \varepsilon'f'.
\end{aligned}$$

Man sieht hieraus deutlich, wie man in solchen Fällen wie der obige zu rechnen hat; auf weitere Erörterungen über vorstehende Formel und Verallgemeinerungen derselben mittelst des Positiven und Negativen wollen wir uns nicht einlassen, da das Obige für die Praxis vollständig genügt.

### Zur geometrischen Construction der vierten und der mittleren Proportionale.

Von Herrn Dr. K. Weihrauch in Arensburg auf der Insel Oesel in Livland.

Die gewöhnlichen Lösungen der Aufgabe, zu drei gegebenen Linien die vierte, zu zwei gegebenen die mittlere Proportionale zu finden, für erstere durch Auftragen der Linien auf die Schenkel eines beliebigen Winkels und Parallelenziehen, für letztere durch Construction eines rechtwinkligen Dreiecks, stehen in keinem Zusammenhange. In didaktischer Hinsicht muss es angenehm sein, eine Lösung angeben zu können, die beide Fälle umfasst.

Sei  $abc$  (Taf. III. Fig. 13.) ein Dreieck, in dem die Höhe  $h$  gezogen ist. Ein Beweis des Satzes, dass die drei Höhen  $h$



ich nicht weiss, und auch in diesem Augenblicke nicht weiter untersuchen mag.

Wir legen die beiden auf einander senkrecht stehenden Asymptoten der gleichseitigen Hyperbel als Axen eines rechtwinkligen Coordinatensystems der  $xy$  zu Grunde; dann ist, wenn wir die sogenannte Potenz der Hyperbel durch  $\bar{\omega}^2$  bezeichnen, die Gleichung derselben:

$$xy = \bar{\omega}^2.$$

Ein beliebiges in die Hyperbel beschriebenes Dreieck  $A_0A_1A_2$ , und die Coordinaten seiner Ecken  $A_0, A_1, A_2$  seien beziehungsweise  $x_0, y_0; x_1, y_1; x_2, y_2$ ; so ist:

$$x_0y_0 = \bar{\omega}^2, \quad x_1y_1 = \bar{\omega}^2, \quad x_2y_2 = \bar{\omega}^2.$$

Die Gleichungen der Seiten  $A_0A_2$  und  $A_1A_2$  sind:

$$y - y_0 = \frac{y_0 - y_2}{x_0 - x_2}(x - x_0),$$

$$y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_1);$$

also sind die Gleichungen der von  $A_0$  auf  $A_1A_2$  und von  $A_1$  auf  $A_0A_2$  gefällten Perpendikel:

$$y - y_0 = -\frac{x_1 - x_2}{y_1 - y_2}(x - x_0),$$

$$y - y_1 = -\frac{x_0 - x_2}{y_0 - y_2}(x - x_1);$$

und aus diesen beiden Gleichungen müssen  $x, y$  bestimmt werden, um den Höhendurchschnitt ( $xy$ ) zu finden. Nun ist aber:

$$y_0 = \frac{\bar{\omega}^2}{x_0}, \quad y_1 = \frac{\bar{\omega}^2}{x_1}, \quad y_2 = \frac{\bar{\omega}^2}{x_2}$$

und:

$$x_0 = \frac{\bar{\omega}^2}{y_0}, \quad x_1 = \frac{\bar{\omega}^2}{y_1}, \quad x_2 = \frac{\bar{\omega}^2}{y_2};$$

also nach dem Obigen:

$$y - y_0 = -\frac{\frac{x_1 - x_2}{\frac{\bar{\omega}^2}{x_1} - \frac{\bar{\omega}^2}{x_2}}}{\frac{\bar{\omega}^2}{x_1} - \frac{\bar{\omega}^2}{x_2}}(x - x_0) = \frac{x_1x_2}{\bar{\omega}^2}(x - x_0),$$

$$y - y_1 = -\frac{\frac{x_0 - x_2}{\frac{\bar{\omega}^2}{x_0} - \frac{\bar{\omega}^2}{x_2}}}{\frac{\bar{\omega}^2}{x_0} - \frac{\bar{\omega}^2}{x_2}}(x - x_1) = \frac{x_0x_2}{\bar{\omega}^2}(x - x_1);$$

und:

$$y - y_0 = -\frac{\frac{\bar{\omega}^2}{y_1} - \frac{\bar{\omega}^2}{y_2}}{y_1 - y_2} (x - x_0) = \frac{\bar{\omega}^2}{y_1 y_2} (x - x_0),$$

$$y - y_1 = -\frac{\frac{\bar{\omega}^2}{y_0} - \frac{\bar{\omega}^2}{y_2}}{y_0 - y_2} (x - x_1) = \frac{\bar{\omega}^2}{y_0 y_2} (x - x_1).$$

Wir haben also die Gleichungen:

$$y - y_0 = \frac{x_1 x_2}{\bar{\omega}^2} (x - x_0), \quad y - y_1 = \frac{x_0 x_2}{\bar{\omega}^2} (x - x_1)$$

und:

$$x - x_0 = \frac{y_1 y_2}{\bar{\omega}^2} (y - y_0), \quad x - x_1 = \frac{y_0 y_2}{\bar{\omega}^2} (y - y_1);$$

aus denen man durch Subtraction die Gleichungen:

$$y_1 - y_0 = \frac{(x_1 - x_0) x_2}{\bar{\omega}^2} x,$$

$$x_1 - x_0 = \frac{(y_1 - y_0) y_2}{\bar{\omega}^2} y;$$

also:

$$\frac{\bar{\omega}^2}{x_1} - \frac{\bar{\omega}^2}{x_0} = \frac{(x_1 - x_0) x_2}{\bar{\omega}^2} x,$$

$$\frac{\bar{\omega}^2}{y_1} - \frac{\bar{\omega}^2}{y_0} = \frac{(y_1 - y_0) y_2}{\bar{\omega}^2} y;$$

folglich:

$$\frac{x_2 x}{\bar{\omega}^2} = -\frac{\bar{\omega}^2}{x_0 x_1}, \quad \frac{y_2 y}{\bar{\omega}^2} = -\frac{\bar{\omega}^2}{y_0 y_1};$$

also:

$$x_0 x_1 x_2 x = -\bar{\omega}^4, \quad y_0 y_1 y_2 y = -\bar{\omega}^4$$

erhält, welche Gleichungen an sich bemerkenswerth sind. Durch Multiplication ergibt sich:

$$x_0 y_0 \cdot x_1 y_1 \cdot x_2 y_2 \cdot xy = \bar{\omega}^8,$$

also nach dem Obigen:

$$\bar{\omega}^2 \bar{\omega}^2 \bar{\omega}^2 xy = \bar{\omega}^6 xy = \bar{\omega}^6,$$

folglich:

$$xy = \bar{\omega}^2,$$

so dass also der Punkt  $(xy)$ , nämlich der gemeinschaftliche Durchschnittspunkt der drei Höhen des in die Hyperbel beschriebenen Dreiecks  $A_0 A_1 A_2$ , ein Punkt derselben Hyperbel ist, wie behauptet wurde.



**Einige Bemerkungen über das von den, von den Spitzen eines Dreiecks nach den Mittelpunkten der Gegenseiten gezogenen Transversalen als Selten gebildete Dreieck.**

Von dem Herausgeber.

Das von den Transversalen, welche die Spitzen  $A, B, C$  eines Dreiecks  $ABC$  mit den Mittelpunkten der Gegenseiten  $a, b, c$  verbinden, die beziehungsweise durch  $\alpha, \beta, \gamma$  bezeichnet werden mögen, gebildete Dreieck ist schon oft betrachtet worden, auch von mir selbst analytisch und rein geometrisch in meinen Supplementen zum mathematischen Wörterbuche. Thl. I. S. 704. Die in dem trefflichen *Giornale di Matematiche*, pubblicato per cura del Professore G. Battaglini. Anno IV. Settembre e Ottobre 1866. p. 293. vorgelegte „*Questione: Essendo dato un triangolo  $ABC$ , si formi colle mediane un secondo triangolo, dimostrare: che l'area del triangolo, che ha per lati le mediane, ha un rapporto costante coll'area del triangolo  $ABC$ . (Mogni).*“ veranlasste mich zu einigen neuen gelegentlichen Betrachtungen über diesen Gegenstand, von denen ich nachstehend das Wesentliche mittheilen werde, weil der eine oder andere Ausdruck vielleicht nicht ganz ohne Interesse sein dürfte, oder zu Uebungen für Schüler benutzt werden könnte. Alle im Folgenden in Anwendung gebrachten Formeln findet man in meiner Abhandlung *Thell XXXVI. Nr. XVIII.*, auf welche daher hier ein für alle Mal verwiesen wird; auch werden hier ganz dieselben Zeichen gebraucht wie dort und ganz das nämliche Coordinatensystem zu Grunde gelegt, worüber daher hier nichts weiter zu sagen ist.

Die Coordinaten von  $C$  sind:

$$2R \cos A \sin B, \quad 2R \sin A \sin B;$$

die Coordinaten des Mittelpunkts der Seite  $AB$  oder  $c$  sind:

$$R \sin C, \quad 0;$$

also ist:

$$\gamma^2 = R^2 (2 \cos A \sin B - \sin C)^2 + 4R^2 \sin A^2 \sin B^2,$$

woraus man mit Rücksicht darauf, dass

$$A + B + C = 180^\circ$$

ist, leicht findet:

$$\gamma^2 = R^2(\sin C^2 + 4 \sin A \sin B \cos C).$$

ist überhaupt:

$$\dots \left\{ \begin{array}{l} \alpha^2 = R^2(\sin A^2 + 4 \cos A \sin B \sin C), \\ \beta^2 = R^2(\sin B^2 + 4 \sin A \cos B \sin C), \\ \gamma^2 = R^2(\sin C^2 + 4 \sin A \sin B \cos C). \end{array} \right.$$

kanntlich ist:

$$\begin{aligned} \cos A \sin B \sin C + \sin A \cos B \sin C + \sin A \sin B \cos C \\ = \frac{1}{4}(\sin A^2 + \sin B^2 + \sin C^2), \end{aligned}$$

nach 1):

$$\dots \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 3R^2(\sin A^2 + \sin B^2 + \sin C^2),$$

$$\dots \dots \dots \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$$

$$R^2(\cos A \sin B \sin C + \sin A \cos B \sin C + \sin A \sin B \cos C).$$

kanntlich ist:

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \quad \sin B = \frac{b}{2R}, \quad \sin C = \frac{c}{2R};$$

$$\sin A^2 + \sin B^2 + \sin C^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4R^2},$$

nach 2):

$$\dots \dots \dots \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{3}{4}.$$

is 1) erhält man mittelst der leicht zu beweisenden Relation:

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C$$

chwierigkeit:

$$\dots \dots \dots \frac{\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4}{R^4}$$

$$\begin{aligned} = \sin A^4 + \sin B^4 + \sin C^4 + 16 \sin A^2 \sin B^2 \sin C^2 \\ + 16 \cos A^2 \sin B^2 \sin C^2 \\ + 16 \sin A^2 \cos B^2 \sin C^2 \\ + 16 \sin A^2 \sin B^2 \cos C^2; \end{aligned}$$

il nun nach 2)

$$\frac{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^2}{R^4} = 9(\sin A^2 + \sin B^2 + \sin C^2)$$

ist, so ist:

$$\begin{aligned} & \frac{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^2 - 2(\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4)}{R^4} \\ &= 7(\sin A^4 + \sin B^4 + \sin C^4) + 2\sin A^2 \sin B^2 (9 - 16 \cos C^2) \\ & \quad + 2\sin B^2 \sin C^2 (9 - 16 \cos A^2) \\ & \quad + 2\sin C^2 \sin A^2 (9 - 16 \cos B^2) \\ & \quad - 32 \sin A^2 \sin B^2 \sin C^2. \end{aligned}$$

Bezeichnen wir den Inhalt des aus den Transversalen  $\alpha$ ,  $\beta$ , als Seiten construirten Dreiecks durch  $\Delta$ , so ist bekanntlich:

$$16\Delta^2 = 2\alpha^2\beta^2 + 2\beta^2\gamma^2 + 2\gamma^2\alpha^2 - \alpha^4 - \beta^4 - \gamma^4,$$

also:

$$16\Delta^2 = (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^2 - 2(\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4),$$

folglich nach der obigen Gleichung:

6)

$$\begin{aligned} \frac{16\Delta^2}{R^4} &= 7(\sin A^4 + \sin B^4 + \sin C^4) + 2\sin A^2 \sin B^2 (9 - 16 \cos C^2) \\ & \quad + 2\sin B^2 \sin C^2 (9 - 16 \cos A^2) \\ & \quad + 2\sin C^2 \sin A^2 (9 - 16 \cos B^2) \\ & \quad - 32 \sin A^2 \sin B^2 \sin C^2. \end{aligned}$$

Setzt man aber in dieser Formel

$$\cos C^2 = 1 - \sin C^2, \quad \cos A^2 = 1 - \sin A^2, \quad \cos B^2 = 1 - \sin B^2$$

so wird dieselbe, wie man sogleich übersieht:

$$\begin{aligned} 7) \dots \dots \dots \frac{16\Delta^2}{R^4} \\ &= 7(\sin A^4 + \sin B^4 + \sin C^4 - 2\sin A^2 \sin B^2 - 2\sin B^2 \sin C^2 - 2\sin C^2 \sin A^2) \\ & \quad + 64 \sin A^2 \sin B^2 \sin C^2, \end{aligned}$$

also, weil

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \quad \sin B = \frac{b}{2R}, \quad \sin C = \frac{c}{2R}$$

ist:

$$\frac{16\Delta^2}{R^4} = \frac{7(a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2b^2c^2 - 2c^2a^2)}{16R^4} + 64 \sin A^2 \sin B^2 \sin C^2$$

Bezeichnen wir den Inhalt des gegebenen Dreiecks  $ABC$  durch  $D$ , so ist bekanntlich:

$$16D^2 = 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4$$

$$D = 2R^2 \sin A \sin B \sin C;$$

also ist nach obiger Gleichung:

$$\frac{16A^2}{R^4} = -\frac{7D^2}{R^4} + \frac{16D^2}{R^4},$$

folglich:

$$16A^2 = 9D^2,$$

oder:

$$8) \dots\dots\dots 4A = 3D, \quad \frac{A}{D} = \frac{3}{4};$$

wie bekannt.

Nach 4) ist also:

$$9) \dots\dots\dots \frac{A}{D} = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Weil

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad \sin B = \frac{b}{2R}, \quad \sin C = \frac{c}{2R}$$

ist; so ist, wie man leicht findet:

$$\sin A^2 + 4 \cos A \sin B \sin C = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4R^2},$$

also nach 1):

10)

$$a^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}, \quad \beta^2 = \frac{2(c^2 + a^2) - b^2}{4}, \quad \gamma^2 = \frac{2(a^2 + b^2) - c^2}{4};$$

wie bekannt.

Bezeichnet man die den Seiten  $\alpha, \beta, \gamma$  des von den Transversalen gebildeten Dreiecks gegenüberstehenden Winkel dieses Dreiecks durch  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ ; so ist:

$$\cos \mathfrak{A} = \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2\beta\gamma},$$

und folglich nach 10), wie man leicht findet:

$$11) \dots \left\{ \begin{array}{l} \cos \mathfrak{A} = \frac{5a^2 - (b^2 + c^2)}{2\sqrt{\{2(c^2 + a^2) - b^2\}\{2(a^2 + b^2) - c^2\}}}, \\ \cos \mathfrak{B} = \frac{5b^2 - (c^2 + a^2)}{2\sqrt{\{2(a^2 + b^2) - c^2\}\{2(b^2 + c^2) - a^2\}}}, \\ \cos \mathfrak{C} = \frac{5c^2 - (a^2 + b^2)}{2\sqrt{\{2(b^2 + c^2) - a^2\}\{2(c^2 + a^2) - b^2\}}}. \end{array} \right.$$

Bezeichnen wir den Halbmesser des um das von den Transversalen gebildete Dreieck beschriebenen Kreises durch  $\mathfrak{M}$ , so ist

$$\alpha^2 = 4\mathfrak{M}^2 \sin \mathfrak{A}^2 = R^2 (\sin A^2 + 4 \cos A \sin B \sin C),$$

$$\beta^2 = 4\mathfrak{M}^2 \sin \mathfrak{B}^2 = R^2 (\sin B^2 + 4 \sin A \cos B \sin C),$$

$$\gamma^2 = 4\mathfrak{M}^2 \sin \mathfrak{C}^2 = R^2 (\sin C^2 + 4 \sin A \sin B \cos C);$$

und da nun

$$\Delta = 2\mathfrak{M}^2 \sin \mathfrak{A} \sin \mathfrak{B} \sin \mathfrak{C},$$

$$D = 2R^2 \sin A \sin B \sin C,$$

$$4\Delta = 3D$$

ist; so ist, wie man leicht findet:

12)

$$\frac{R}{\mathfrak{M}} = \frac{6 \sin A \sin B \sin C}{\sqrt{(\sin A^2 + 4 \cos A \sin B \sin C)(\sin B^2 + 4 \sin A \cos B \sin C) \times (\sin C^2 + 4 \sin A \sin B \cos C)}}$$

oder nach dem Obigen:

13)

$$\frac{R}{\mathfrak{M}} = \frac{6abc}{\sqrt{\{2(b^2 + c^2) - a^2\} \{2(c^2 + a^2) - b^2\} \{2(a^2 + b^2) - c^2\}}}$$

Weil nun nach dem Obigen:

$$\begin{aligned} \sin \mathfrak{A} &= \frac{R}{\mathfrak{M}} \cdot \frac{\sqrt{\sin A^2 + 4 \cos A \sin B \sin C}}{2} \\ &= \frac{R}{\mathfrak{M}} \cdot \frac{\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}}{4R} \end{aligned}$$

ist, so ist nach 13):

$$14) \dots \left\{ \begin{aligned} \sin \mathfrak{A} &= \frac{3abc}{2R \sqrt{\{2(c^2 + a^2) - b^2\} \{2(a^2 + b^2) - c^2\}}}, \\ \sin \mathfrak{B} &= \frac{3abc}{2R \sqrt{\{2(a^2 + b^2) - c^2\} \{2(b^2 + c^2) - a^2\}}}, \\ \sin \mathfrak{C} &= \frac{3abc}{2R \sqrt{\{2(b^2 + c^2) - a^2\} \{2(c^2 + a^2) - b^2\}}}; \end{aligned} \right.$$

oder, weil bekanntlich

$$\frac{abc}{4R} = D$$

ist:



$$S_n : s_n = S_n - S_{2n} : S_{2n},$$

folglich:

$$S_n + s_n : s_n = S_n : S_{2n},$$

woraus sich die Gleichung:

$$1) \dots S_{2n} = \frac{s_n S_n}{S_n + s_n}$$

ergibt; weil nun aber:

$$S_{2n} = \frac{U_{2n}}{2n}, \quad s_n = \frac{u_n}{n}, \quad S_n = \frac{U_n}{n}$$

ist, so ist:

$$2) \dots U_{2n} = \frac{2u_n U_n}{U_n + u_n}.$$

Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke  $DEF$  und  $ABD$  ferner:

$$\frac{1}{2} S_{2n} : \frac{1}{2} s_{2n} = S_{2n} : s_{2n} = s_{2n} : \frac{1}{2} s_n,$$

also:

$$3) \dots 2s_{2n}^2 = s_n S_{2n};$$

und folglich auf ganz ähnliche Art wie vorher, weil  $s_{2n} = \frac{u_{2n}}{2n}$

$$4) \dots u_{2n}^2 = u_n U_{2n}.$$

Setzen wir nun:

$$5) \dots q_n = \frac{U_n - u_n}{U_n + u_n},$$

so ist:

$$1 + q_n = \frac{2U_n}{U_n + u_n}, \quad 1 - q_n = \frac{2u_n}{U_n + u_n};$$

folglich nach 2):

$$U_{2n} = u_n(1 + q_n),$$

also nach 4):

$$u_{2n}^2 = u_n^2(1 + q_n),$$

so dass wir jetzt die folgenden Formeln haben:

$$6) \dots u_{2n} = u_n \sqrt{1 + q_n}, \quad U_{2n} = u_n(1 + q_n);$$

oder auch:

$$7) \dots u_{2n} = u_n \sqrt{1 + q_n}, \quad U_{2n} = u_{2n} \sqrt{1 + q_n}.$$

In ähnlicher Bezeichnung wie oben ist:

$$q_{2n} = \frac{U_{2n} - u_{2n}}{U_{2n} + u_{2n}},$$

also offenbar nach 7):

$$8) \dots \dots \dots q_{2n} = \frac{u_{2n} - u_n}{u_{2n} + u_n}.$$

Wenn man nun bei der annähernden Berechnung des Kreisumfangs von den Umfängen  $u_n$  und  $U_n$  der inneren und äusseren regulären necke ausgeht, so kann man die Rechnung auf verschiedene Arten anordnen, etwa auf folgende Art:

9)

$$q_n = \frac{U_n - u_n}{U_n + u_n},$$

$$u_{2n} = u_n \sqrt{1 + q_n}, \quad U_{2n} = u_n(1 + q_n);$$

$$q_{2n} = \frac{U_{2n} - u_{2n}}{U_{2n} + u_{2n}} = \frac{u_{2n} - u_n}{u_{2n} + u_n},$$

$$u_{4n} = u_{2n} \sqrt{1 + q_{2n}}, \quad U_{4n} = u_{2n}(1 + q_{2n});$$

$$q_{4n} = \frac{U_{4n} - u_{4n}}{U_{4n} + u_{4n}} = \frac{u_{4n} - u_{2n}}{u_{4n} + u_{2n}},$$

$$u_{8n} = u_{4n} \sqrt{1 + q_{4n}}, \quad U_{8n} = u_{4n}(1 + q_{4n});$$

$$q_{8n} = \frac{U_{8n} - u_{8n}}{U_{8n} + u_{8n}} = \frac{u_{8n} - u_{4n}}{u_{8n} + u_{4n}},$$

$$u_{16n} = u_{8n} \sqrt{1 + q_{8n}}, \quad U_{16n} = u_{8n}(1 + q_{8n});$$

u. s. w.

Man braucht aber bloss den Umfang  $u_n$  des inneren necks zu Grunde zu legen, weil sich daraus  $U_n$  berechnen lässt. Es ist nämlich offenbar:

$$S_n : s_n = R : r_n, \text{ also auch } U_n : u_n = R : r_n;$$

nun ist aber:

$$r_n^2 = R^2 - \frac{1}{4}s_n^2 = R^2 - \frac{u_n^2}{4n^2} = R^2 \left(1 - \frac{u_n^2}{4n^2 R^2}\right),$$

folglich:

$$U_n : u_n = 1 : \sqrt{1 - \frac{u_n^2}{4n^2 R^2}},$$



also:

$$10) \dots \dots \dots U_n = \frac{u_n}{\sqrt{1 - \frac{u_n^2}{4n^2 R^2}}},$$

und wenn man, wie es bei allen diesen Rechnungen bekannt das Vortheilhafteste ist,  $R = 1$  setzt:

$$11) \dots U_n = \frac{u_n}{\sqrt{1 - \left(\frac{u_n}{2n}\right)^2}} = \frac{u_n}{\sqrt{\left(1 - \frac{u_n}{2n}\right)\left(1 + \frac{u_n}{2n}\right)}}.$$

Weil die halbe Seite eines jeden in den Kreis beschriebenen regulären Vielecks offenbar kleiner als der Halbmesser ist, so

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{u_n}{n} < 1, \quad \frac{u_n}{2n} < 1, \quad \left(\frac{u_n}{2n}\right)^2 < 1;$$

und weil nun nach Vorstehendem:

$$U_n = u_n \left\{ 1 - \left(\frac{u_n}{2n}\right)^2 \right\}^{-\frac{1}{2}}$$

ist, so kann man sich bei der Berechnung von  $U_n$  aus  $u_n$  zweckmässig des Binomialtheorems bedienen, wodurch man in der bekannten Bezeichnung der Binomialcoefficienten den folgenden Ausdruck erhält:

$$U_n = u_n \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)_1 \cdot \left(\frac{u_n}{2n}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)_2 \cdot \left(\frac{u_n}{2n}\right)^4 - \left(-\frac{1}{2}\right)_3 \cdot \left(\frac{u_n}{2n}\right)^6 + \dots \right\}$$

Nun ist aber bekanntlich:

$$\left(-\frac{1}{2}\right)_1 = \frac{-\frac{1}{2}}{1} = -\frac{1}{2},$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)_2 = \frac{-\frac{1}{2} \cdot -\frac{1}{2} - 1}{1 \cdot 2} = +\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4},$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)_3 = \frac{-\frac{1}{2} \cdot -\frac{1}{2} - 1 \cdot -\frac{1}{2} - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} = -\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6},$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)_4 = \frac{-\frac{1}{2} \cdot -\frac{1}{2} - 1 \cdot -\frac{1}{2} - 2 \cdot -\frac{1}{2} - 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = +\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8},$$

u. s. w.,

also:

$$12) \dots U_n = u_n \left\{ 1 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{u_n}{2n}\right)^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \left(\frac{u_n}{2n}\right)^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \left(\frac{u_n}{2n}\right)^6 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \left(\frac{u_n}{2n}\right)^8 + \dots \right\}.$$

Wenn man die vorstehende convergirende Reihe bei einem gewissen Gliede abbricht, also etwa:

$$13) \quad U_n = u_n \left\{ 1 + \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{u_n}{2n} \right)^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \left( \frac{u_n}{2n} \right)^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \left( \frac{u_n}{2n} \right)^6 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \left( \frac{u_n}{2n} \right)^8 + \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \dots 2k} \cdot \left( \frac{u_n}{2n} \right)^{2k} \right\}$$

setzt, so kann man den Fehler, welchen man bei der Bestimmung von  $U_n$  begeht, auf folgende Art beurtheilen. Es ist offenbar die Summe der auf das letzte Glied der eingeklammerten Reihe folgenden Glieder:

$$\begin{aligned} & \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2k+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2k+2)} \cdot \left( \frac{u_n}{2n} \right)^{2k+2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2k+3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2k+4)} \cdot \left( \frac{u_n}{2n} \right)^{2k+4} \\ & + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2k+5)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2k+6)} \cdot \left( \frac{u_n}{2n} \right)^{2k+6} \\ & + \dots \\ & < \left( \frac{u_n}{2n} \right)^{2k+2} + \left( \frac{u_n}{2n} \right)^{2k+4} + \left( \frac{u_n}{2n} \right)^{2k+6} + \left( \frac{u_n}{2n} \right)^{2k+8} + \dots \end{aligned}$$

gleich kleiner als:

$$\left( \frac{u_n}{2n} \right)^{2k+2} \left\{ 1 + \left( \frac{u_n}{2n} \right)^2 + \left( \frac{u_n}{2n} \right)^4 + \left( \frac{u_n}{2n} \right)^6 + \dots \right\},$$

so, wie aus der elementaren Lehre von den geometrischen Reihen bekannt ist, kleiner als:

$$\frac{\left( \frac{u_n}{2n} \right)^{2k+2}}{1 - \left( \frac{u_n}{2n} \right)^2},$$

und der Fehler, welchen man begeht, wenn man  $U_n$  mittelst der Formel 13) bestimmt, ist also immer kleiner als:

$$u_n \cdot \frac{\left( \frac{u_n}{2n} \right)^{2k+2}}{1 - \left( \frac{u_n}{2n} \right)^2}.$$

Dass dieser Fehler in's Unendliche abnimmt, wenn  $k$  in's endliche wächst, ist klar, weil  $\frac{u_n}{2n} < 1$  ist; natürlich sind  $\frac{u_n}{2n}$  hier als constante Grössen zu betrachten, indem man sich verändern lässt.

Bei der Rechnung nach den Formeln 9) ist vorzüglich Berechnung der Quadratwurzeln:

$$\sqrt{1+q_n}, \sqrt{1+q_{2n}}, \sqrt{1+q_{4n}}, \sqrt{1+q_{8n}}, \dots$$

lästig, weshalb man sich bei dieser Berechnung auch zweckmässig des Binomialtheorems bedienen wird, wie wir für die erste dieser Quadratwurzeln zeigen wollen. Weil 5) offenbar  $q_n < 1$  ist, so ist nach dem Binomialtheorem:

$$\sqrt{1+q_n} = (1+q_n)^{\frac{1}{2}} = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)_1 q_n + \left(\frac{1}{2}\right)_2 q_n^2 + \left(\frac{1}{2}\right)_3 q_n^3 + \dots$$

und folglich, weil:

$$\left(\frac{1}{2}\right)_1 = \frac{\frac{1}{2}}{1} = +\frac{1}{2},$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)_2 = \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{1.2} = -\frac{1}{2.4},$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)_3 = \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{1.2.3} = +\frac{1.3}{2.4.6},$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)_4 = \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)(\frac{1}{2}-3)}{1.2.3.4} = -\frac{1.3.5}{2.4.6.8},$$

u. s. w.

ist:

14)

$$\sqrt{1+q_n} = 1 + \frac{1}{2}q_n - \frac{1}{2.4}q_n^2 + \frac{1.3}{2.4.6}q_n^3 - \frac{1.3.5}{2.4.6.8}q_n^4 + \dots$$

Die einzelnen Glieder dieser Reihe berechnet man am E nach und nach mittelst der folgenden Formeln:

$$\frac{1}{2}q_n = 1 \cdot \frac{q_n}{2},$$

$$\frac{1}{2.4}q_n^2 = \frac{1}{2}q_n \cdot \frac{q_n}{4},$$

$$\frac{1.3}{2.4.6}q_n^3 = \frac{1}{2.4}q_n^2 \cdot \frac{3q_n}{6},$$

$$\frac{1.3.5}{2.4.6.8}q_n^4 = \frac{1.3}{2.4.6}q_n^3 \cdot \frac{5q_n}{8},$$

$$\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.10}q_n^5 = \frac{1.3.5}{2.4.6.8}q_n^4 \cdot \frac{7q_n}{10},$$

u. s. w.

Zur Berechnung von  $u_{2n}$  aus  $u_n$  hat man nun nach 9) die folgende Formel:

$$15) \dots u_{2n} = u_n \left( 1 + \frac{1}{2} q_n - \frac{1}{2 \cdot 4} q_n^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} q_n^3 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} q_n^4 + \dots \right).$$

Reibt man nun in dieser Formel bei einem gewissen Gliede stehen und setzt demzufolge etwa:

$$16) \dots u_{2n} = u_n \left\{ 1 + \frac{1}{2} q_n - \frac{1}{2 \cdot 4} q_n^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} q_n^3 - \dots \right. \\ \left. \dots + (-1)^{k-1} \cdot \frac{1 \cdot 3 \dots (2k-3)}{2 \cdot 4 \dots 2k} q_n^k \right\},$$

kann man den Fehler, welchen man auf diese Weise begeht, auf folgende Art beurtheilen.

Man setze der Kürze wegen:

$$17) \dots C_1 = \frac{1}{2}, \quad C_k = \frac{1 \cdot 3 \dots (2k-3)}{2 \cdot 4 \dots 2k} \text{ für } k > 1;$$

ist:

$$\begin{aligned} u_{2n} &= u_n \{ 1 + C_1 q_n - C_2 q_n^2 + C_3 q_n^3 - \dots + (-1)^{k-1} C_k q_n^k \} \\ &+ (-1)^k u_n \{ C_{k+1} q_n^{k+1} - C_{k+2} q_n^{k+2} + C_{k+3} q_n^{k+3} - C_{k+4} q_n^{k+4} + \dots \} \\ &= u_n \{ 1 + C_1 q_n - C_2 q_n^2 + C_3 q_n^3 - \dots + (-1)^{k-1} C_k q_n^k \} \\ &+ (-1)^k u_n \left\{ \begin{aligned} &(C_{k+1} q_n^{k+1} - C_{k+2} q_n^{k+2}) \\ &+ (C_{k+3} q_n^{k+3} - C_{k+4} q_n^{k+4}) \\ &+ (C_{k+5} q_n^{k+5} - C_{k+6} q_n^{k+6}) \\ &+ \dots \end{aligned} \right\}. \end{aligned}$$

Weil nach 17) für  $k \geq 1$ :

$$C_{k+1} = C_k \cdot \frac{2k-1}{2k+2}$$

, so bilden die positiven Grössen

$$C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, \dots$$

en so wie die Potenzen von  $q_n$  eine fortwährend abnehmende Reihe, und die Differenzen:

$$\begin{aligned} &C_{k+1} q_n^{k+1} - C_{k+2} q_n^{k+2}, \\ &C_{k+3} q_n^{k+3} - C_{k+4} q_n^{k+4}, \\ &C_{k+5} q_n^{k+5} - C_{k+6} q_n^{k+6}, \\ &\text{u. s. w.} \end{aligned}$$

sind folglich offenbar sämmtlich positiv; also ist nach dem Obigen

$$u_{2n} > u_n \{ 1 + C_1 q_n - C_2 q_n^2 + C_3 q_n^3 - \dots + (-1)^{k-1} C_k q_n^k \}$$

oder

$$u_{2n} < u_n \{ 1 + C_1 q_n - C_2 q_n^2 + C_3 q_n^3 - \dots + (-1)^{k-1} C_k q_n^k \},$$

jenachdem  $k$  eine gerade oder eine ungerade Zahl ist.

Folglich ist immer:

$$u_n \{ 1 + C_1 q_n - C_2 q_n^2 + C_3 q_n^3 - \dots + (-1)^{k-1} C_k q_n^k \} \leq u_{2n},$$

$$u_n \{ 1 + C_1 q_n - C_2 q_n^2 + C_3 q_n^3 - \dots + (-1)^k C_{k+1} q_n^{k+1} \} \geq u_{2n};$$

jenachdem  $k$   $\begin{matrix} \text{gerade} \\ \text{ungerade} \end{matrix}$  ist, und es sind also:

$$u_n \{ 1 + C_1 q_n - C_2 q_n^2 + C_3 q_n^3 - \dots + (-1)^{k-1} C_k q_n^k \},$$

$$u_n \{ 1 + C_1 q_n - C_2 q_n^2 + C_3 q_n^3 - \dots + (-1)^k C_{k+1} q_n^{k+1} \}$$

jederzeit zwei Gränzen, zwischen denen  $u_{2n}$  liegt. Der absolut Werth des Unterschieds dieser beiden Gränzen, welchen der  $n$  bestimmende Fehler offenbar nie übersteigen kann, ist:

$$C_{k+1} q_n^{k+1} u_n,$$

und es erhellet aus dem Obigen leicht, dass dieser Fehler in's Unendliche abnimmt, wenn man  $k$  in's Unendliche wachsen lässt wobei man noch bemerken kann, dass  $u_n$  nie grösser als  $2\pi$  ist

Nachdem man  $U_n$  nach der oben gegebenen Anleitung bestimmt hat, kann man die Formeln 9) nun auf folgende Art darstellen:

18)

$$q_n = \frac{U_n - u_n}{U_n + u_n},$$

$$u_{2n} = u_n \left( 1 + \frac{1}{2} q_n - \frac{1}{2 \cdot 4} q_n^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} q_n^3 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} q_n^4 + \dots \right),$$

$$U_{2n} = u_n (1 + q_n);$$

$$q_{2n} = \frac{u_{2n} - u_n}{u_{2n} + u_n},$$

$$u_{4n} = u_{2n} \left( 1 + \frac{1}{2} q_{2n} - \frac{1}{2 \cdot 4} q_{2n}^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} q_{2n}^3 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} q_{2n}^4 + \dots \right),$$

$$U_{4n} = u_{2n} (1 + q_{2n});$$

$$q_{4n} = \frac{u_{4n} - u_{2n}}{u_{4n} + u_{2n}},$$

$$u_{8n} = u_{4n} \left( 1 + \frac{1}{2} q_{4n} - \frac{1}{2 \cdot 4} q_{4n}^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} q_{4n}^3 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} q_{4n}^4 + \dots \right),$$

$$U_{8n} = u_{4n} (1 + q_{4n});$$

u. s. w.

Aus der ersten der beiden Formeln 6) erhält man nach und nach:

$$u_{2n} = u_n \sqrt{1 + q_n},$$

$$\begin{aligned} u_{4n} &= u_{2n} \sqrt{1 + q_{2n}} \\ &= u_n \sqrt{1 + q_n} \cdot \sqrt{1 + q_{2n}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{8n} &= u_{4n} \sqrt{1 + q_{4n}} \\ &= u_n \sqrt{1 + q_n} \cdot \sqrt{1 + q_{2n}} \cdot \sqrt{1 + q_{4n}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{16n} &= u_{8n} \sqrt{1 + q_{8n}} \\ &= u_n \sqrt{1 + q_n} \cdot \sqrt{1 + q_{2n}} \cdot \sqrt{1 + q_{4n}} \cdot \sqrt{1 + q_{8n}}, \end{aligned}$$

u. s. w.

also allgemein:

$$19) \quad u_{2^k n} = u_n \sqrt{1 + q_n} \cdot \sqrt{1 + q_{2n}} \cdot \sqrt{1 + q_{4n}} \dots \sqrt{1 + q_{2^{k-1}n}}.$$

Ferner ist nach 4):

$$(u_{2^k n})^2 = u_{2^{k-1}n} U_{2^k n},$$

also nach 19):

$$\begin{aligned} &u_n^2 (1 + q_n) (1 + q_{2n}) (1 + q_{4n}) \dots (1 + q_{2^{k-1}n}) \\ &= u_n \sqrt{1 + q_n} \cdot \sqrt{1 + q_{2n}} \cdot \sqrt{1 + q_{4n}} \dots \sqrt{1 + q_{2^{k-2}n}} \cdot U_{2^k n}, \end{aligned}$$

und folglich:

20)

$$U_{2^k n} = u_n \sqrt{1 + q_n} \cdot \sqrt{1 + q_{2n}} \cdot \sqrt{1 + q_{4n}} \dots \sqrt{1 + q_{2^{k-2}n}} \cdot (1 + q_{2^{k-1}n})$$

oder:

21)

$$U_{2^k n} = u_n \sqrt{1 + q_n} \cdot \sqrt{1 + q_{2n}} \cdot \sqrt{1 + q_{4n}} \dots \sqrt{1 + q_{2^{k-1}n}} \cdot \sqrt{1 + q_{2^{k-1}n}},$$

daher nach 19) und 21):

$$22) \dots \dots \dots U_{2^k n} = u_{2^k n} \cdot \sqrt{1 + q_{2^{k-1} n}},$$

wie es nach der zweiten der Formeln 7) sein muss.

Weil natürlich

$$u_{2^k n} < 2\pi < U_{2^k n}$$

ist, so sind:

$$u_n \sqrt{1 + q_n} \cdot \sqrt{1 + q_{2n}} \cdot \sqrt{1 + q_{4n}} \dots \sqrt{1 + q_{2^{k-1} n}},$$

$$u_n \sqrt{1 + q_n} \cdot \sqrt{1 + q_{2n}} \cdot \sqrt{1 + q_{4n}} \dots \sqrt{1 + q_{2^{k-1} n}} \cdot \sqrt{1 + q_{2^k n}}$$

zwei Gränzen, zwischen denen  $2\pi$  liegt.

Nach 5) ist:

$$q_n = \frac{U_n - u_n}{U_n + u_n} = \frac{1 - \frac{u_n}{U_n}}{1 + \frac{u_n}{U_n}},$$

also, weil nach dem Obigen bekanntlich:

$$S_n : s_n = U_n : u_n = R : r_n$$

ist:

$$23) \dots \dots \dots q_n = \frac{1 - \frac{r_n}{R}}{1 + \frac{r_n}{R}} = \frac{R - r_n}{R + r_n},$$

und für  $R = 1$ :

$$24) \dots \dots \dots q_n = \frac{1 - r_n}{1 + r_n},$$

woraus zugleich erhellet, dass immer  $q_n < 1$  ist.

Nach 8) und 7) ist:

$$q_{2n} = \frac{u_{2n} - u_n}{u_{2n} + u_n} = \frac{u_n \sqrt{1 + q_n} - u_n}{u_n \sqrt{1 + q_n} + u_n},$$

also:

$$25) \dots \dots \dots q_{2n} = \frac{\sqrt{1 + q_n} - 1}{\sqrt{1 + q_n} + 1},$$

oder:

$$q_{2n} = \frac{(\sqrt{1 + q_n} - 1)^2}{q_n} = \frac{q_n}{(\sqrt{1 + q_n} + 1)^2},$$

also:

$$26) \dots q_{2n} = \frac{2 + q_n - 2\sqrt{1 + q_n}}{q_n} = \frac{q_n}{2 + q_n + 2\sqrt{1 + q_n}},$$

und da nun offenbar:

$$2 + q_n + 2\sqrt{1 + q_n} > 4$$

ist, so ist immer:

$$27) \dots \dots \dots q_{2n} < \frac{1}{2} q_n.$$

Daher ist nach und nach:

$$q_{2n} < \frac{1}{2} q_n,$$

$$q_{4n} < \frac{1}{2} q_{2n} < \frac{1}{4^2} q_n,$$

$$q_{8n} < \frac{1}{2} q_{4n} < \frac{1}{4^3} q_n,$$

$$q_{16n} < \frac{1}{2} q_{8n} < \frac{1}{4^4} q_n,$$

u. s. w.,

also allgemein:

$$28) \dots \dots \dots q_{2^k n} < \frac{1}{4^k} q_n,$$

woraus man sieht, dass, wenn  $k$  in's Unendliche wächst,  $q_{2^k n}$  in's Unendliche abnimmt, sich also  $1 + q_{2^k n}$  oder auch  $1 + q_{2^{k-1} n}$ , folglich natürlich auch  $\sqrt{1 + q_{2^{k-1} n}}$ , in's Unendliche der Einheit als Gränze nähert.

Diese Bemerkungen über den vorliegenden Gegenstand mögen für jetzt hinreichen.

### Einfacher Beweis der Formel $e^{xi} = \cos x + i \sin x$ .

Von Herrn Dr. K. L. Bauer, Assistenten der Physik am Polytechnikum in Carlsruhe.

Von den bekannten Beweisen obiger Formel basirt einer auf der Definition der Exponentialgrösse  $e^z$ , auch bei komplexen  $z$ , als Grenzwert der Potenz  $(1 + \frac{z}{m})^m$  für ohne Ende wachsende  $m$  (Schlömlich, Höb. Anal. I. 258. u. s. w.); ein anderer, weniger zu empfehlender, auf der imaginären Substitution  $xi$  statt  $x$  in der



für reelle  $x$  entwickelten Exponentialreihe (Stern, Algebr. An S. 179. u. s. w.). Ist man in der Wahl der Beweismittel unbeschränkt, so dürfte man am einfachsten zum Ziele gelangen wie folgt. Jedenfalls werden wir

$$1) \dots \dots \dots e^{xi} = u + iv$$

setzen können, so dass  $u$  und  $v$  reelle Funktionen von  $x$  bedeuten; diese sind zu ermitteln. Differenziert man beiderseitig Bezug auf  $x$ , so folgt:

$$i(u + iv) = \frac{du}{dx} + i \frac{dv}{dx},$$

welche Gleichung sofort in die beiden anderen zerfällt:

$$2) \dots \dots \dots \frac{du}{dx} = -v,$$

$$3) \dots \dots \dots \frac{dv}{dx} = u.$$

Hieraus ergibt sich weiter:

$$u \frac{du}{dx} + v \frac{dv}{dx} = 0,$$

oder, was dasselbe ist:

$$\frac{d(u^2 + v^2)}{dx} = 0, \quad u^2 + v^2 = \text{Const.}$$

Weil nun gemäss 1) gleichzeitig  $x=0$ ,  $u=1$ ,  $v=0$  zu nehmen ist, so hat man bestimmter:

$$4) \dots \dots \dots u^2 + v^2 = 1.$$

Nach dieser Beziehung verwandelt sich Gleichung 3) in:

$$\frac{dv}{\sqrt{1-v^2}} = dx, \quad \arcsin v = x + \text{Const.},$$

und mit Benutzung von 4):

$$v = \sin(x + \text{Const.}), \quad u = \cos(x + \text{Const.}).$$

Die Integrationskonstante bestimmt sich wie oben durch Spezialisierung von  $x$ ,  $u$ ,  $v$  in  $0$ ,  $1$ ,  $0$ ; wornach die Konstante gleichzeitig den Bedingungen zu genügen hat:  $\sin \text{Const.} = 0$ ,  $\cos \text{Const.} = 1$ , woraus  $\text{Const.} = 2m\pi$  folgt, ein ganzes, positives oder negatives Vielfaches der Kreisperipherie. Gleichung 1) ist also schreiben:

$$e^{xi} = \cos(x + 2m\pi) + i \sin(x + 2m\pi) \\ = \cos x + i \sin x,$$

Woraus auch leicht  $e^{2m\pi i} = 1$ , also

$$1) \dots \dots \dots e^{xi + 2m\pi i} = \cos x + i \sin x$$

folgt.

Man könnte dieses Beweisverfahren etwas abändern, indem man die logarithmische Ableitung von Formel 1) nähme. Man würde dann auf die Differentialgleichungen geführt:

$$2') \dots \dots \dots u \frac{du}{dx} + v \frac{dv}{dx} = 0;$$

$$3') \dots \dots \dots u^2 + v^2 = u \frac{dv}{dx} - v \frac{du}{dx},$$

welche beide auch aus 2) und 3) gefolgert werden können. In der Gestalt

$$\frac{d(u^2 + v^2)}{dx} = 0, \quad dx = \frac{d\left(\frac{v}{u}\right)}{1 + \left(\frac{v}{u}\right)^2}$$

sind sie ohne Weiteres integrabel und führen also ebenfalls zum Ziel.

# Ueber die in Thl. XLV. Heft 2. S. 219. mitgetheilte Summierungsformel des Herrn Alessandro Dorna in Turin.

Von Herrn M. Curtze, Lehrer am Gymnasium in Thorn.

Die in Thl. XLV. Hft. 2. S. 219. mitgetheilte, dem trefflichen *Giornale di Matematiche di Napoli* entnommene Formel des Herrn Alessandro Dorna

(1)

$$\frac{1}{2}n \cos 0\varphi + (n-1) \cos \varphi + (n-2) \cos 2\varphi + \dots + 2 \cos (n-2)\varphi + 1 \cdot \cos (n-1)\varphi \\ = \frac{\sin^2 \frac{1}{2}n\varphi}{2 \sin^2 \frac{1}{2}\varphi}$$

lässt sich in folgender Weise leicht entwickeln. Bekanntlich ist:

(2)

$$\cos \varphi + \cos 2\varphi + \cos 3\varphi + \dots + \cos p\varphi = \frac{\cos \frac{1}{2}(p+1)\varphi \cdot \sin \frac{1}{2}p\varphi}{\sin \frac{1}{2}\varphi}.$$

Setzt man hierin der Reihe nach:

$$p = n-1, \quad n-2, \quad n-3, \dots 3, 2, 1;$$

so erhält man:

$$\begin{aligned}\cos\varphi + \cos 2\varphi + \cos 3\varphi + \dots + \cos(n-2)\varphi + \cos(n-1)\varphi &= \frac{\cos\frac{1}{2}n\varphi \cdot \sin\frac{1}{2}(n-1)\varphi}{\sin\frac{1}{2}\varphi} \\ \cos\varphi + \cos 2\varphi + \cos 3\varphi + \dots + \cos(n-2)\varphi &= \frac{\cos\frac{1}{2}(n-1)\varphi \cdot \sin\frac{1}{2}(n-2)\varphi}{\sin\frac{1}{2}\varphi} \\ \cos\varphi + \cos 2\varphi + \cos 3\varphi + \dots + \cos(n-3)\varphi &= \frac{\cos\frac{1}{2}(n-2)\varphi \cdot \sin\frac{1}{2}(n-3)\varphi}{\sin\frac{1}{2}\varphi}\end{aligned}$$

u. s. w. u. s. w.

$$\begin{aligned}\cos\varphi + \cos 2\varphi + \cos 3\varphi &= \frac{\cos\frac{1}{2}\varphi \cdot \sin\frac{3}{2}\varphi}{\sin\frac{1}{2}\varphi}, \\ \cos\varphi + \cos 2\varphi &= \frac{\cos\frac{3}{2}\varphi \cdot \sin\frac{2}{2}\varphi}{\sin\frac{1}{2}\varphi}, \\ \cos\varphi &= \frac{\cos\frac{2}{2}\varphi \cdot \sin\frac{1}{2}\varphi}{\sin\frac{1}{2}\varphi};\end{aligned}$$

und hieraus durch beiderseitige Addition:

$$\begin{aligned}(n-1)\cos\varphi + (n-2)\cos 2\varphi + (n-3)\cos 3\varphi + \dots + 2\cos(n-2)\varphi + 1.\cos(n-1)\varphi \\ = \frac{\left\{ \begin{array}{l} \cos\frac{1}{2}n\varphi \cdot \sin\frac{1}{2}(n-1)\varphi + \cos\frac{1}{2}(n-1)\varphi \sin\frac{1}{2}(n-2)\varphi + \dots \\ \dots + \cos\frac{3}{2}\varphi \sin\frac{2}{2}\varphi + \cos\frac{2}{2}\varphi \cdot \sin\frac{1}{2}\varphi \end{array} \right\}}{\sin\frac{1}{2}\varphi}\end{aligned}$$

Verwandelt man jetzt nach der Formel

$$\cos\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)]$$

jedes der Producte im Zähler des Bruches auf der rechten Seite in eine Differenz zweier Sinusse, so erhält man nach leicht Umformung:

$$\begin{aligned}(n-1)\cos\varphi + (n-2)\cos 2\varphi + (n-3)\cos 3\varphi + \dots + 2\cos(n-2)\varphi + 1.\cos(n-1)\varphi \\ = \frac{\sin\frac{1}{2}\varphi + \sin\frac{3}{2}\varphi + \sin\frac{5}{2}\varphi + \dots + \sin\frac{2n-3}{2}\varphi + \sin\frac{2n-1}{2}\varphi}{2\sin\frac{1}{2}\varphi}\end{aligned}$$

Der Zähler des Bruches lässt sich für  $\alpha = \frac{1}{2}\varphi$ ,  $\beta = \varphi$  und  $m$ : nach der Formel

$$\begin{aligned}\sin\alpha + \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha + 2\beta) + \dots + \sin(\alpha + (m-1)\beta) \\ = \frac{\sin(\alpha + \frac{1}{2}(m-1)\beta) \cdot \sin\frac{1}{2}m\beta}{\sin\frac{1}{2}\beta}\end{aligned}$$

zusammenziehen, und ist dann:

$$\frac{\sin(\frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{2}(n-1)\varphi) \cdot \sin\frac{1}{2}n\varphi}{\sin\frac{1}{2}\varphi} = \frac{\sin^2\frac{1}{2}n\varphi}{\sin\frac{1}{2}\varphi}.$$

Setzt man diesen Werth des Zählers ein, setzt  $-\frac{n}{2}$  auf die linke Seite und beachtet, dass  $\cos 0\varphi = 1$  ist, so ergibt sich unmittelbar die Formel

$$\cos 0\varphi + (n-1)\cos\varphi + (n-2)\cos 2\varphi + \dots + 2\cos(n-2)\varphi + 1.\cos(n-1)\varphi \\ = \frac{\sin^2 \frac{1}{2}n\varphi}{2\sin^2 \frac{1}{2}\varphi},$$

was die zu beweisende Gleichung ist.

Behandelt man die bekannte Formel:

$$(3) \dots \sin\varphi + \sin 2\varphi + \sin 3\varphi + \dots + \sin n\varphi = \frac{\sin \frac{1}{2}(n+1)\varphi \cdot \sin \frac{1}{2}n\varphi}{\sin \frac{1}{2}\varphi}$$

derselben Weise wie Formel (2) unter Beachtung der Gleichungen:

$$\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)],$$

$$\cos\alpha + \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha + 2\beta) + \dots + \cos(\alpha + (n-1)\beta) \\ = \frac{\cos[\alpha + \frac{1}{2}(n-1)\beta] \sin \frac{1}{2}n\beta}{\sin \frac{1}{2}\beta},$$

erhält man sehr leicht folgende, vielleicht eben so interessante Formel:

(4)

$$-1)\sin\varphi + (n-2)\sin 2\varphi + (n-3)\sin 3\varphi + \dots + 2\sin(n-2)\varphi + 1.\sin(n-1)\varphi \\ = \frac{n\sin\varphi - \sin n\varphi}{4\sin^2 \frac{1}{2}\varphi}.$$

Mit Rücksicht auf diese Formel, die sich nicht gut anders schreiben lässt, würde ich die Formel (1) auch folgendermassen zu schreiben mir erlauben:

(5)

$$-1)\cos\varphi + (n-2)\cos 2\varphi + (n-3)\cos 3\varphi + \dots + 2\cos(n-2)\varphi + 1.\cos(n-1)\varphi \\ = \frac{\sin^2 \frac{1}{2}n\varphi - n\sin^2 \frac{1}{2}\varphi}{2\sin^2 \frac{1}{2}\varphi}.$$

Schreiben des Herrn Gymnasial-Oberlehrers Dr. Meyer in Bunzlau (Schlesien) an den Herausgeber.

In Folge Ihrer im dritten Hefte des 45. Theils Ihres sehr geschätzten Archivs Seite 348. enthaltenen Aufforderung zur Mittheilung eines directen Beweises der Relationen:

$$1) \dots \sin 20^\circ + \sin 40^\circ = \sin 80^\circ,$$

$$2) -\sin 20^\circ \cdot \sin 40^\circ + \sin 20^\circ \cdot \sin 80^\circ + \sin 40^\circ \cdot \sin 80^\circ = \frac{1}{4},$$

$$3) \dots 16 \sin 20^\circ \cdot \sin 40^\circ \cdot \sin 60^\circ \cdot \sin 80^\circ = 3,$$

erlaube ich mir, Ihnen nachfolgend einen solchen Beweis zur fälligen Mittheilung für das Archiv zu übersenden:

$$1) \dots \sin 20^\circ + \sin 40^\circ = 2 \sin \frac{40^\circ + 20^\circ}{2} \cdot \cos \frac{40^\circ - 20^\circ}{2} \\ = 2 \sin 30^\circ \cdot \cos 10^\circ = \cos 10^\circ = \sin 80^\circ.$$

$$2) \dots \sin 80^\circ \cdot \sin 40^\circ + \sin 80^\circ \sin 20^\circ - \sin 40^\circ \cdot \sin 20^\circ \\ = \cos 10^\circ (\sin 40^\circ + \sin 20^\circ) - \frac{1}{2} \cos 20^\circ + \frac{1}{2} \cos 60^\circ \\ = \cos 10^\circ \cdot 2 \sin 30^\circ \cdot \cos 10^\circ - \frac{1}{2} (2 \cos^2 10^\circ - 1) + \frac{1}{2} \\ = \cos^2 10^\circ - \cos^2 10^\circ + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

$$3) 16 \sin 20^\circ \cdot \sin 40^\circ \cdot \sin 60^\circ \cdot \sin 80^\circ = 8 \sin 20^\circ \cdot \sin 60^\circ (\cos 40^\circ - \cos 120^\circ) \\ = 8 \sin 20^\circ \cdot \sin 60^\circ \cdot \cos 40^\circ + 8 \sin 20^\circ \cdot \sin 30^\circ \cdot \sin 60^\circ \\ = 8 \sin 20^\circ \cdot \sin 60^\circ \cdot \cos 40^\circ + 4 \sin 20^\circ \cdot \sin 60^\circ \\ = 4 \sin 60^\circ (\sin 60^\circ - \sin 20^\circ) + 4 \sin 60^\circ \cdot \sin 20^\circ = 4 \sin^2 60^\circ = 3$$

(Vergl. S. 143.)

### B e r i c h t i g u n g e n.

Thl. VII. S. 105. Z. 9. statt  $1 - \cos y^2$  setze man  $1 - \sin y^2$ .

— — S. 105. Z. 6. v. u. muss es statt

$$-\frac{\sin(\alpha + \beta)^2}{\lambda^2 \mu^2} \{ \sin \frac{1}{2} C^2 \cos \frac{1}{2} (\varphi - \psi)^2 - \cos \frac{1}{2} C^2 \sin \frac{1}{2} (\varphi - \psi)^2 \}$$

heissen:

$$-\frac{\sin(\alpha + \beta)^2}{\lambda^2 \mu^2} \{ \sin \frac{1}{2} C^2 \cos \frac{1}{2} (\varphi - \psi)^2 - \cos \frac{1}{2} C^2 \sin \frac{1}{2} (\varphi - \psi)^2 \}^2.$$

— — S. 106. Z. 17. von unten statt  $B_1 = -2 \left( \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\mu^2} \right) \cot \frac{1}{2} C$  setze:

$$B_1 = -2 \left( \frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\mu^2} \right) \cot \frac{1}{2} C.$$

### Druckfehler in Schrön's siebenstelligen Logarithmentafeln.

No. 18. Taf. I. S. 6. Fusstabelle, Spalte 3 zwischen Zeile 1 mit D. und Zeile 2 fehlt in einigen Auflagen das Minuszeichen (—).

No. 19. Taf. II. S. 443. Diff. zwischen  $\log \tan 39^\circ 58' 10''$  und  $20''$  statt lies 428.









Zur Bestimmung der Constanten  $C$  wird  $\frac{dx}{dt} = V \cos \alpha$  für  $s = 0$ , daher  $C = V \cos \alpha$ .

$$\frac{dx}{dt} = V \cos \alpha \cdot e^{-bs} \dots \dots \dots 9)$$

Nach den Gleichungen 8) hat man ferner:

$$b \frac{ds}{dt} = - \frac{\frac{d^2x}{dt^2}}{\frac{dx}{dt}}$$

und

$$g = -b \frac{ds}{dt} \cdot \frac{dy}{dt} - \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{d^2y}{dt^2},$$

woraus man ableitet

$$g dt^2 + \frac{dx d^2y - dy d^2x}{dx} = 0.$$

Setzt man nun

$$\frac{dy}{dx} = p, \dots \dots \dots 10)$$

so ist

$$\frac{dp}{dx} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{dx d^2y - dy d^2x}{dx^3},$$

$$g dt^2 + dp dx = 0. \dots \dots \dots 11)$$

Aus 9) und 11) erhält man durch Elimination von  $dt$ :

$$dp + \frac{g}{V^2 \cos^2 \alpha} e^{2bs} dx = 0. \dots \dots \dots 12)$$

Eliminiert man  $dx$  mittelst der Gleichung:

$$ds = dx \sqrt{1 + p^2},$$

so ist:

$$dp \sqrt{1 + p^2} + \frac{g}{V^2 \cos^2 \alpha} e^{2bs} ds = 0.$$

Diese Gleichung integriert und die willkürliche Constante gleich  $\frac{1}{2}L$  gesetzt, so erhält man:

13)

$$p \sqrt{1 + p^2} + l(p + \sqrt{1 + p^2}) + \frac{g e^{2bs}}{b V^2 \cos^2 \alpha} = L.$$

Zur Abkürzung schreiben wir:

$$p\sqrt{1+p^2} + l(p + \sqrt{1+p^2}) = \Lambda(p). \quad . . . . 14)$$

Dadurch geht die Gleichung 13) über in:

$$\frac{ge^{2bs}}{bV^2\cos^2\alpha} = L - \Lambda(p). \quad . . . . 15)$$

Zur Bestimmung von  $L$  hat man  $p = \operatorname{tg}\alpha$ , wenn  $s=0$ :

$$L = \frac{g}{bV^2\cos^2\alpha} + \Lambda(\operatorname{tg}\alpha). \quad . . . . 16)$$

Aus 12) und 15) findet sich:

$$b dx = \frac{-dp}{L - \Lambda(p)}, \quad . . . . 17)$$

und mit Beachtung von 10):

$$b dy = \frac{-p dp}{L - \Lambda(p)}. \quad . . . . 18)$$

Aus den Gleichungen 11) und 17) lässt sich die folgende ableiten:

$$\sqrt{bg} \cdot dt = \frac{-dp}{\sqrt{L - \Lambda(p)}}. \quad . . . . 19)$$

Das negative Zeichen wurde gewählt, weil  $p$  abnimmt, wenn  $t$  wächst.

Um auch die Geschwindigkeit zu bestimmen, hat man:

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{dx\sqrt{1+p^2}}{dt},$$

folglich nach 9):

$$v = V \cos \alpha \cdot e^{-bs} \sqrt{1+p^2}, \quad . . . . 20)$$

oder wenn  $s$  vermittelt 15) eliminirt wird:

$$v = \sqrt{\frac{g}{b}} \cdot \sqrt{\frac{1+p^2}{L - \Lambda(p)}}. \quad . . . . 21)$$

Die hier öfter auftretende Funktion  $\Lambda(p)$  wollen wir die **Lamdafunktion** nennen. In Tafel I. sind die Werthe derselben berechnet, so dass man für jedes  $p$  das zugehörige  $\Lambda(p)$  einfach daraus entnehmen kann.

#### §. 4.

Die Gleichungen 17), 18) und 19) lassen sich nicht integrieren;

man muss deshalb, um die Coordinaten der Bahn, so wie die Flugzeit berechnen zu können, zu einer Näherungsmethode seine Zuflucht nehmen. Wir setzen voraus, die Gleichung der Bahn lasse sich in folgender Form darstellen:

$$y = Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 + \dots \quad 22)$$

Die successive Differentiation dieser Gleichung ergibt:

$$\frac{dy}{dx} = A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3 + 5Ex^4 + \dots \quad 23)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2B + 6Cx + 12Dx^2 + 20Ex^3 + \dots \quad 24)$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 6C + 24Dx + 60Ex^2 + \dots \quad 25)$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = 24D + 120Ex + \dots \quad 26)$$

etc.

Um die Werthe der Differentialquotienten abzuleiten, so folgt aus 10) und 17):

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -b(L - A(p)), \dots \quad 27)$$

$$\frac{d}{dx} \frac{d^2y}{dx^2} = 2b \sqrt{1 + p^2} \cdot \frac{dp}{dx},$$

oder:

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -2b^2(L - A(p)) \sqrt{1 + p^2} \dots \quad 28)$$

In ähnlicher Weise erhält man:

29)

$$\frac{d^4y}{dx^4} = 2b^3(L - A(p))^2 \frac{p}{\sqrt{1 + p^2}} - 4b^3(L - A(p))(1 + p^2).$$

Aus 10) und 23) folgt  $p = A + 2Bx + 3Cx^2 + \dots$ . Setzt man  $x = 0$ , so wird  $p = \operatorname{tg} \alpha$ , daher  $A = \operatorname{tg} \alpha$ . Ebenso erhält man durch Gleichsetzung von 24) und 27), von 25) und 28) etc. die folgenden Coefficienten, nämlich:

$$B = -\frac{g}{2V^2 \cos^2 \alpha}, \quad C = -\frac{bg}{3V^2 \cos^2 \alpha}, \quad D = \frac{bg^2 \sin \alpha}{12V^4 \cos^4 \alpha} - \frac{b^2 g}{6V^2 \cos^4 \alpha}.$$

Daher ist jetzt die Gleichung der Flugbahn:



Daher heisst jetzt die Gleichung:

$$\eta = \operatorname{tg} \varphi \cdot \xi - \frac{\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \psi}{2m} \xi^2. \quad \dots \dots \dots 35)$$

Für  $\xi = m$  wird  $\eta = n$ , daher erhalten wir die Beziehung:

$$n = \frac{\operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg} \psi}{2} m. \quad \dots \dots \dots 36)$$

Hiernach lässt sich  $n$  berechnen, sobald  $m$  bekannt ist. Wir bestimmen aber den Werth von  $m$  mittelst der Bedingung, dass der durch  $B$  und  $C$  gelegte parabolische Bogen dem Bogen  $BMC$  der ballistischen Curve gleich wird. Um die Parabel zu rektificiren, ist

$$d\sigma = d\xi \sqrt{1 + \left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2} = d\xi \sqrt{1 + (A + 2B\xi)^2}.$$

Zur Abkürzung setzen wir  $A + 2B\xi = z$ , folglich:

$$d\xi = \frac{dz}{2B}, \quad d\sigma = \frac{dz}{2B} \sqrt{1 + z^2}.$$

Die Integration ergibt:

$$\sigma = \frac{1}{4B} (z \sqrt{1 + z^2} + l(z + \sqrt{1 + z^2})) + \text{const.}$$

und mit Beachtung von 14):

$$\sigma = \frac{1}{4B} A(z) + \text{const.}$$

Für  $\sigma = 0$  ist  $\xi = 0$ ,  $z = A$ , also:

$$\text{const.} = -\frac{A(A)}{4B}, \quad 4B\sigma = A(z) - A(A).$$

Um den ganzen Bogen  $BMC$  zu erhalten, ist zu setzen:

$$z = A + 2Bm = \operatorname{tg} \psi,$$

und weil nach 34):

$$4B = \frac{2}{m} (\operatorname{tg} \psi - \operatorname{tg} \varphi),$$

so findet sich:

$$\frac{2\sigma (\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \psi)}{m} = A(\operatorname{tg} \varphi) - A(\operatorname{tg} \psi).$$

Wird in diesen Ausdruck der Werth von  $\sigma$  aus 31) gesetzt, so erhält man:



$$R_0 = \frac{m \sec^3 \varphi}{\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \psi}, \quad \varrho_0 = \frac{\sec^3 \varphi}{b(L - A \operatorname{tg} \varphi)}.$$

Für den Punkt  $C$  ist dagegen:

$$R_1 = \frac{m \sec^3 \psi}{\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \psi}, \quad \varrho_1 = \frac{\sec^3 \psi}{b(L - A \operatorname{tg} \psi)}.$$

Dass diese Werthe von  $R$  und  $\varrho$  nicht übereinstimmen, geht schon daraus hervor, dass bei  $R$  nur im Zähler eine Veränderliche vorkommt, während bei  $\varrho$  auch der Nenner veränderlich ist.

Statt der Gleichung 32) legen wir jetzt die folgende Grunde:

$$\eta = A\xi + B\xi^2 + C\xi^3 + D\xi^4, \quad \dots \dots \dots 40)$$

und wollen die vier Coefficienten dadurch bestimmen, dass wir ausser den früheren Bedingungen auch noch die Krümmungen am Anfang und Ende des Bogens  $BC$  in Uebereinstimmung bringen.

Bezeichnet man den Krümmungshalbmesser der durch 40) dargestellten Curve durch  $R$ , so ist für den Punkt  $M$ :

$$R = \pm \frac{\sec^3 \theta}{2B + 6C\xi + 12D\xi^2} \dots \dots \dots 41)$$

Von den beiden Zeichen behalten wir das untere bei, damit  $R$  positiv werde. Denn  $B$  ist jedenfalls negativ, da  $\operatorname{tg} \theta = A + 2B\xi + 3C\xi^2 + 4D\xi^3$  und  $A = \operatorname{tg} \varphi$ , der Winkel  $\theta$  aber kleiner als  $\varphi$ .

Zur Bestimmung von  $A, B, C, D$  haben wir folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi &= A, \\ \operatorname{tg} \psi &= A + 2Bm + 3Cm^2 + 4Dm^3, \\ \frac{\sec^3 \varphi}{b(L - A \operatorname{tg} \varphi)} &= -\frac{\sec^3 \varphi}{2B}, \end{aligned}$$

$$\frac{\sec^3 \psi}{b(L - A \operatorname{tg} \psi)} = -\frac{\sec^3 \psi}{2B + 6Cm + 12Dm^2}.$$

Die Werthe finden sich, wie folgt:

42)

$$\begin{aligned} A &= \operatorname{tg} \varphi, \\ B &= -\frac{1}{2}b(L - A \operatorname{tg} \varphi), \\ 3m^2 C &= 3(\operatorname{tg} \psi - \operatorname{tg} \varphi) - 4Bm + bm(L - A \operatorname{tg} \psi), \\ 2m^3 D &= \operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \psi + Bm - \frac{1}{2}bm(L - A \operatorname{tg} \psi). \end{aligned}$$

Werden diese Werthe in die folgende Gleichung eingesetzt:





$$\begin{aligned}\log \frac{2}{3} &= 9.8239087 \\ \log \sin 2^\circ 30' &= 7.2793592 \\ \text{Comp. log cos } 5^\circ &= 9.9983442 \\ &\underline{7.1016121}\end{aligned}$$

$$\log \left( 1 + \frac{\sin 2^\circ 30'}{\cos 5^\circ} \right) = 0.0005526$$

$$\log 2 = 0.3010300$$

$$\log \sin 5^\circ = 8.9402960$$

$$\log s = \underline{9.2418786}$$

$$\text{danach } s = 0.1745$$

$$\text{Genauer ist } s = 0.1745$$

$$\text{Fehler} = -0.0000$$

Der Fehler ist also bei einem Winkel am Mittelpunkt  $v$  kleiner als  $\frac{1}{2000000}$  des Halbmessers. Bei einem Winkel  $5^\circ$  ist der Fehler 32mal kleiner.

Hieraus ersieht man, dass man mittelst 46) einen Bogen sehr genau bestimmen können, wenn  $\alpha$  und  $\beta$  kleine Winkel sind. Zerlegen wir in 46) den Nenner, so erhalten wir:

$$s = c \left( 1 + \frac{\text{tg } \frac{1}{2}\alpha \text{tg } \frac{1}{2}\beta}{1 - \text{tg } \frac{1}{2}\alpha \text{tg } \frac{1}{2}\beta} \right) \dots$$

Der Ausdruck in der Klammer ist nur vom Produkt der Tangenten abhängig. Wir setzen jetzt:

$$1 + \frac{\text{tg } \frac{1}{2}\alpha \text{tg } \frac{1}{2}\beta}{1 - \text{tg } \frac{1}{2}\alpha \text{tg } \frac{1}{2}\beta} = \mathcal{F}(\text{tg } \frac{1}{2}\alpha \text{tg } \frac{1}{2}\beta) \dots$$

und erhalten danach:

$$s = c \cdot \mathcal{F}(\text{tg } \frac{1}{2}\alpha \text{tg } \frac{1}{2}\beta) \dots$$

Die Tafel II. enthält für  $\log(\text{tg } \frac{1}{2}\alpha \text{tg } \frac{1}{2}\beta)$  die zugehörigen  $\mathcal{F}$  von  $\log \mathcal{F}(\text{tg } \frac{1}{2}\alpha \text{tg } \frac{1}{2}\beta)$  auf 5 Decimalen.

(Taf. VIII. Fig. 4.) Bezeichnen wir jetzt wieder den  $BMC$  durch  $\sigma$  und  $\angle CBP$  durch  $\kappa$ , so ist nach 49):

$$\sigma = \frac{m}{\cos \kappa} \cdot \mathcal{F}(\text{tg } \frac{1}{2}(\varphi - \kappa) \text{tg } \frac{1}{2}(\kappa - \psi)), \dots$$

und diesen Werth demjenigen der Gleichung 31) gleichgesetzt erhält man:

$$m = \frac{1}{2b} \left( \frac{L - A \text{tg } \psi}{L - A \text{tg } \varphi} \right) \cdot \frac{\cos \kappa}{\mathcal{F}(\text{tg } \frac{1}{2}(\varphi - \kappa) \text{tg } \frac{1}{2}(\kappa - \psi))}$$

Um aber hiernach  $m$  berechnen zu können, muss der Winkel  $\kappa$  bekannt sein. Nach der Figur ist  $\operatorname{tg} \kappa = \frac{n}{m}$ , und für  $n$  seinen Werth aus 44) gesetzt:

$$\operatorname{tg} \kappa = \frac{1}{2}(\operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg} \psi) + \frac{1}{12}b(\lambda \operatorname{tg} \varphi - \lambda \operatorname{tg} \psi)m.$$

Da hier  $m$  noch im letzten Gliede auftritt, so müsste dessen Werth bekannt sein. Beachten wir aber, dass dieses Glied gegen das erste sehr klein ist, indem  $b$  ein kleiner Bruch, so können wir für  $m$  seinen Näherungswerth nach 37) nehmen. Dadurch wird:

$$\operatorname{tg} \kappa = \frac{1}{2}(\operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg} \psi) + \frac{1}{12}(\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \psi)l\left(\frac{L - \lambda \operatorname{tg} \psi}{L - \lambda \operatorname{tg} \varphi}\right). \quad 52)$$

Um die hier vorkommenden natürlichen Logarithmen in Briggsche zu verwandeln, dividiren wir durch  $M=0,4342945$  und haben endlich zur Bestimmung von  $m$  und  $n$  die Gleichungen:

53)

$$\operatorname{tg} \kappa = \frac{1}{2}(\operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg} \psi) + \frac{1}{12M}(\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \psi) \log \left( \frac{L - \lambda \operatorname{tg} \psi}{L - \lambda \operatorname{tg} \varphi} \right),$$

$$m = \frac{1}{2Mb} \log \left( \frac{L - \lambda \operatorname{tg} \psi}{L - \lambda \operatorname{tg} \varphi} \right) \cdot \frac{\cos \kappa}{\mathcal{F}_1(\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\varphi - \kappa) \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\kappa - \psi))},$$

$$n = m \operatorname{tg} \kappa.$$

## §. 7.

Für den niedersteigenden Ast der ballistischen Curve sind die Tangentenwinkel grösser als  $90^\circ$ . Wir wollen daher untersuchen, wie sich die Lamdafunktion bei negativen Werthen von  $p$  verhält. Sei  $p = -p'$ , wo also  $p'$  positiv, so ist, weil

$$\lambda(p) = p\sqrt{1+p^2} + l(p + \sqrt{1+p^2}),$$

wenn  $p'$  eingesetzt wird:

$$\lambda(-p') = -p'\sqrt{1+p'^2} + l(\sqrt{1+p'^2} - p') = -p'\sqrt{1+p'^2} - l\frac{1}{\sqrt{1+p'^2} - p'},$$

$$\lambda(-p') = -(p'\sqrt{1+p'^2} + l(p' + \sqrt{1+p'^2})) = -\lambda(p').$$

Hiernach ist also allgemein:

$$\lambda(-p) = -\lambda(p). \quad . . . . . 54)$$

Statt der stumpfen Winkel  $\varphi$ ,  $\psi$  und  $\kappa$  (Taf. VIII. Fig. 5.) wollen wir übrigens ihre Supplemente  $\varphi_1$ ,  $\psi_1$ ,  $\kappa_1$  einführen. Da nun





Setzt man darin  $\xi = \omega$ , so wird  $\frac{d\eta}{d\xi} = \operatorname{tg} \varepsilon$ , daher:

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \operatorname{tg} \varepsilon' + b(L + A \operatorname{tg} \varepsilon') \omega. \quad \dots \dots \dots 62)$$

Endlich hat man noch:

$$\omega_1 = DE + \omega. \quad \dots \dots \dots 63)$$

## §. 9.

### Bestimmung der Flugzeit.

Die Differentialgleichung 19), welche die Beziehung zwischen  $dt$  und  $dp$  angibt, kann nicht integrirt werden. Doch lässt sich leicht ein genäherter Werth für die Zeit  $\tau$  aufstellen, welche verfließt, wenn  $p$  sich um eine gewisse Grösse ändert. Denn setzt (Taf. VIII. Fig. 2.) man den Bogen  $BC = \sigma$  und die Geschwindigkeit in  $B = v_1$ , in  $C = v_2$ , so ist nach 31) und 21):

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \frac{1}{2b} l \left( \frac{L - A \operatorname{tg} \psi}{L - A \operatorname{tg} \varphi} \right), \\ v_1 &= \frac{\sqrt{\frac{g}{b}}}{\cos \varphi \sqrt{L - A \operatorname{tg} \varphi}}, \\ v_2 &= \frac{\sqrt{\frac{g}{b}}}{\cos \psi \sqrt{L - A \operatorname{tg} \psi}}. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 64)$$

Nimmt man an, die Bewegung von  $B$  nach  $C$  sei eine gleichmässig verzögerte, was um so weniger von der Wahrheit abweichen wird, je kleiner der Bogen  $BC$ , so hat man  $\sigma = \frac{v_1 + v_2}{2} \tau$ , also

$$\tau = \frac{2\sigma}{v_1 + v_2}. \quad \dots \dots \dots 65)$$

Um für  $\tau$  einen genaueren Werth abzuleiten, betrachten wir die Zeit  $t$  als Abscisse, die Geschwindigkeit  $v$  als Ordinate einer Curve, deren Gleichung daher durch  $v = f(t)$  dargestellt wird.

Da allgemein  $d\sigma = v dt$ , also  $\sigma = \int_v^{v+\tau} v dt$ , so stellt  $\sigma$  die

Fläche  $BCED$  (Taf. VIII. Fig. 6.) dieser Curve vor. Es ist daher aus der bekannten Fläche  $\sigma$  und den begrenzenden Ordinaten  $v_1$ ,  $v_2$  die Abscissendifferenz  $\tau$  zu bestimmen.

Um einen bequemen Ausdruck für diese Fläche zu erhalten, legen wir nach  $DJ$  die Abscissenaxe eines Coordinatensystems und nehmen für das Curvenstück  $DE$  (Taf. VIII. Fig. 6.) folgende Gleichungen an:

$$\left. \begin{aligned} y &= Ax + Bx^2 + Cx^3, \\ \frac{dy}{dx} &= A + 2Bx + 3Cx^2, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 66)$$

Für  $x=0$  wird  $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \zeta$ , für  $x=\tau$  wird  $y=v$ ,  $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \theta$ , daher ben wir zur Bestimmung von  $A, B, C$  folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \zeta &= A, \\ \operatorname{tg} \theta &= A + 2B\tau + 3C\tau^2, \\ v &= A\tau + B\tau^2 + C\tau^3. \end{aligned}$$

daraus findet sich:

$$\left. \begin{aligned} A &= \operatorname{tg} \zeta, \\ B\tau^2 &= 3v - \tau \operatorname{tg} \theta - 2\tau \operatorname{tg} \zeta, \\ C\tau^3 &= \tau(\operatorname{tg} \zeta + \operatorname{tg} \theta) - 2v, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 67)$$

$$\begin{aligned} \text{Fläche } DJE &= \int_0^\tau y dx = \int_0^\tau (Ax + Bx^2 + Cx^3) dx \\ &= \frac{\tau}{12} (6A\tau + 4B\tau^2 + 3C\tau^3). \end{aligned}$$

Wenn die Werthe von  $A, B, C$  eingesetzt, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \text{Fläche } DJE &= \frac{1}{12} \tau v + \frac{1}{12} \tau^3 (\operatorname{tg} \zeta - \operatorname{tg} \theta) = \frac{v_1 - v_{II}}{2} \tau - \frac{1}{12} \tau^3 (\operatorname{tg} \theta - \operatorname{tg} \zeta), \\ \text{Fläche } BCED &= BCJD - DJE = v_1 \tau - \frac{1}{2} (v_1 - v_{II}) \tau + \frac{1}{12} \tau^3 (\operatorname{tg} \theta - \operatorname{tg} \zeta), \\ \sigma &= \frac{1}{2} (v_1 + v_{II}) \tau + \frac{1}{12} (\operatorname{tg} \theta - \operatorname{tg} \zeta) \tau^3. \dots \dots \dots 68) \end{aligned}$$

Um die Winkel  $\zeta$  und  $\theta$  zu bestimmen, suchen wir den Werth des Differentialquotienten  $\frac{dv}{dt}$ . Nach 21) ist  $v^2 = \frac{g}{b} \cdot \frac{1+p^2}{L - Ap}$ . Nimmt man beiderseits die Logarithmen und differentiirt, so findet man:

$$dv = v \left( \frac{p}{1+p^2} + \frac{\sqrt{1+p^2}}{L - Ap} \right) dp$$

und erhält mit Zuziehung der Gleichung 19):

$$\frac{dv}{dt} = -g \left( \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} + \frac{1+p^2}{L - Ap} \right). \dots \dots \dots 69)$$

Dieser Ausdruck ist die Tangente des Neigungswinkels der Berührenden mit der Abscissenaxe für die Curve  $v = f(t)$ . Das negative Zeichen sagt, dass dieser Winkel ein stumpfer ist. Die Winkel  $\zeta$  und  $\theta$  sind die Supplemente der stumpfen Winkel für diejenigen Punkte, wo  $p = \operatorname{tg} \varphi$  und  $p = \operatorname{tg} \psi$  ist. Wir haben daher:

$$\operatorname{tg} \zeta = g \left( \sin \varphi + \frac{\sec^2 \varphi}{L - A \operatorname{tg} \varphi} \right) \quad \text{und} \quad \operatorname{tg} \theta = g \left( \sin \psi + \frac{\sec^2 \psi}{L - A \operatorname{tg} \psi} \right).$$

Mit Beachtung der Gleichungen 64) erhält man:

$$\operatorname{tg} \zeta = g \sin \varphi + b v_1^2 \quad \text{und} \quad \operatorname{tg} \theta = g \sin \psi + b v_{II}^2,$$

$$\operatorname{tg} \theta - \operatorname{tg} \zeta = g (\sin \psi - \sin \varphi) + b (v_{II}^2 - v_1^2). \quad . . . 70)$$

Wird dieser Werth in 68) eingesetzt, so erhält man zur Bestimmung von  $\tau$  die Gleichung:

$$\sigma = \frac{1}{2} (v_1 + v_{II}) \tau + \frac{1}{6} \tau^2 [g (\sin \psi - \sin \varphi) + b (v_{II}^2 - v_1^2)].$$

Im aufsteigenden Ast der ballistischen Curve ist  $\varphi > \psi$  und  $v_1 > v_{II}$ , deshalb schreiben wir:

$$\sigma = \frac{1}{2} (v_1 + v_{II}) \tau - \frac{1}{6} \tau^2 [g (\sin \varphi - \sin \psi) + b (v_1^2 - v_{II}^2)],$$

$$\tau = \frac{2\sigma}{v_1 + v_{II}} + \frac{\tau^2}{6} \cdot \frac{g (\sin \varphi - \sin \psi) + b (v_1^2 - v_{II}^2)}{v_1 + v_{II}}.$$

Da das zweite Glied, in welchem  $\tau^2$  vorkommt, eine ziemlich kleine Grösse ist, so können wir daselbst für  $\tau$  den Näherungswerth 65) setzen und erhalten:

$$\tau = \frac{2\sigma}{v_1 + v_{II}} + \frac{1}{6} \left( \frac{2\sigma}{v_1 + v_{II}} \right)^2 \cdot [b (v_1 - v_{II}) + g \frac{\sin \varphi - \sin \psi}{v_1 + v_{II}}]. \quad 71)$$

Übersichtliche Zusammenstellung der Formeln zur Berechnung der Wurfhöhe, Wurfweite und Flugzeit.

### §. 10.

Um die Formeln 53) für die Rechnung etwas bequemer einzurichten, führen wir die Hilfsgrösse  $u$  ein, und setzen:

$$\frac{1}{6M} \log \left( \frac{L - A \operatorname{tg} \psi}{L - A \operatorname{tg} \varphi} \right) = u,$$

dadurch wird:

$$\operatorname{tg} \kappa = \frac{1}{2} (\operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg} \psi) + \frac{1}{2} (\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \psi) u$$





$$\operatorname{tg} \kappa_1 = \frac{1}{2} p (1 - u_1),$$

$$a_1 = 6k \frac{u_1 \cos \kappa_1}{\mathcal{F}[\operatorname{tg} \frac{1}{2} \kappa_1 \operatorname{tg} \frac{1}{2} (\alpha - \kappa_1)]},$$

$$h_1 = a_1 \operatorname{tg} \kappa_1;$$

$$p_2 = \sqrt{\frac{HL}{k}} \left(1 + \frac{1}{3L} \sqrt{\frac{HL}{k}}\right)^2,$$

$$\log u_2 = 9.58406 + \log \left( \log \frac{L + \mathcal{A} p_2}{L + \mathcal{A} p} \right),$$

$$\operatorname{tg} \kappa_2 = \frac{1}{2} (p_2 + p) - \frac{1}{2} (p_2 - p) u_2,$$

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = p_2,$$

$$a_2 = 6k \cdot \frac{u_2 \cos \kappa_2}{\mathcal{F}[\operatorname{tg} \frac{1}{2} (\alpha_2 - \kappa_2) \operatorname{tg} \frac{1}{2} (\kappa_2 - \alpha)]},$$

$$h_2 = a_2 \operatorname{tg} \kappa_2,$$

$$\zeta = H - (h_1 + h_2),$$

$$J = \frac{L + \mathcal{A} p_2}{4k p_2},$$

$$\omega = \frac{\frac{\zeta}{p_2}}{1 + J \cdot \frac{\zeta}{p_2}},$$

$$\operatorname{tg} \varepsilon = p_2 (1 + 2J\omega),$$

$$w_1 = \alpha_1 + a_2 + \omega,$$

$$W = w + w_1.$$

### C. Flugzeit.

Zeit v.  $A$  bis  $D = \tau$ , Bogen  $AD = \sigma$ , Geschwindigk. in  $D = |$

„ „  $D$  „  $E = \tau_1$ , „  $DE = \sigma_1$ , „ „  $E = |$

„ „  $E$  „  $C = \tau_2$ , „  $EC = \sigma_2$ , „ „  $C = |$

$$\sigma = 6ku,$$

$$V_1 = \sqrt{\frac{2gk}{L}},$$

$$\sigma_1 = 6ku_1,$$

$$V_2 = \frac{\sqrt{2gk}}{\cos \alpha \sqrt{L + \mathcal{A} p}},$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{M} k \log \left( \frac{L + \mathcal{A} \operatorname{tg} \varepsilon}{L + \mathcal{A} p} \right),$$

$$V_3 = \frac{\sqrt{2gk}}{\cos \varepsilon \sqrt{L + \mathcal{A} \operatorname{tg} \varepsilon}},$$

$$\log \frac{1}{M} = 0.36222,$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2\sigma}{V+V_1} + \frac{1}{2} \left( \frac{2\sigma}{V+V_1} \right)^2 \left[ \frac{V-V_1}{2k} + \frac{g \sin \alpha}{V+V_1} \right], \\
&= \frac{2\sigma_1}{V_1+V_2} + \frac{1}{2} \left( \frac{2\sigma_1}{V_1+V_2} \right)^2 \left[ \frac{V_1-V_2}{2k} + \frac{g \sin \alpha}{V_1+V_2} \right], \\
&= \frac{2\sigma_2}{V_2+V_3} + \frac{1}{2} \left( \frac{2\sigma_2}{V_2+V_3} \right)^2 \left[ \frac{V_2-V_3}{2k} + \frac{g(\sin \varepsilon - \sin \alpha)}{V_2+V_3} \right].
\end{aligned}$$

## §. 11.

liegt  $\angle \alpha$  zwischen  $15^\circ$  und  $30^\circ$ , so wende man folgende an (Taf. VIII. Fig. 8.):

$$k = \frac{1}{\lambda \gamma} \cdot \frac{Q}{F} = 3.3445 \frac{Q}{F},$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}\alpha,$$

$$p = \operatorname{tg} \alpha,$$

$$p_1 = \operatorname{tg} \alpha_1,$$

$$L = \frac{2gk}{V^2 \cos^2 \alpha} + \Delta p.$$

## A. Aufsteigender Ast.

$$\log u = 9.58406 + \log \left( \log \frac{L - \Delta p_1}{L - \Delta p} \right),$$

$$\operatorname{tg} \kappa = \frac{1}{2}(p + p_1) + \frac{1}{2}(p - p_1)u,$$

$$a = 6k \cdot \frac{u \cos \kappa}{\mathcal{F}[\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\alpha - \kappa) \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\kappa - \alpha_1)]},$$

$$h = a \operatorname{tg} \kappa;$$

$$\log u_1 = 9.58406 + \log \left( \log \frac{L}{L - \Delta p_1} \right),$$

$$\operatorname{tg} \kappa_1 = \frac{1}{2}p_1(1 + u_1),$$

$$a_1 = 6k \cdot \frac{u_1 \cos \kappa_1}{\mathcal{F}[\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\alpha_1 - \kappa_1) \operatorname{tg} \frac{1}{2}\kappa_1]},$$

$$h_1 = a_1 \operatorname{tg} \kappa_1,$$

$$w = a + a_1,$$

$$H = h + h_1.$$

## B. Niedersteigender Ast.

$$\log u_2 = 9.58406 + \log \left( \log \frac{L + \Delta p_1}{L} \right),$$

$$\operatorname{tg} \kappa_2 = \frac{1}{2}p_1(1 - u_2),$$

$$a_2 = 6k \frac{u_2 \cos \kappa_2}{\mathcal{F}[\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\alpha_1 - \kappa_2) \operatorname{tg} \frac{1}{2} \kappa_2]},$$

$$h_2 = a_2 \operatorname{tg} \kappa_2;$$

$$\log u_2 = 9.58406 + \log \left( \log \frac{L + Ap}{L + Ap_1} \right),$$

$$\operatorname{tg} \kappa_2 = \frac{1}{2}(p + p_1) - \frac{1}{2}(p - p_1)u_2,$$

$$a_3 = 6k \cdot \frac{u_3 \cos \kappa_3}{\mathcal{F}[\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\alpha - \kappa_3) \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\kappa_3 - \alpha_1)]},$$

$$h_3 = a_3 \operatorname{tg} \kappa_3;$$

$$p_4 = \sqrt{\frac{HL}{k}} \left( 1 + \frac{1}{3L} \sqrt{\frac{HL}{k}} \right)^2,$$

$$\log u_4 = 9.58406 + \log \left( \log \frac{L + Ap_4}{L + Ap} \right),$$

$$\operatorname{tg} \kappa_4 = \frac{1}{2}(p_4 + p) - \frac{1}{2}(p_4 - p)u_4,$$

$$\operatorname{tg} \alpha_4 = p_4,$$

$$a_4 = 6k \cdot \frac{u_4 \cos \kappa_4}{\mathcal{F}[\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\alpha_4 - \kappa_4) \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\kappa_4 - \alpha)]},$$

$$h_4 = a_4 \operatorname{tg} \kappa_4,$$

$$\zeta = H - (h_2 + h_3 + h_4),$$

$$J = \frac{L + Ap_4}{4kp_4},$$

$$\omega = \frac{\frac{\zeta}{p_4}}{1 + J \cdot \frac{\zeta}{p_4}},$$

$$\operatorname{tg} \varepsilon = p_4(1 + 2J\omega),$$

$$w_1 = a_2 + a_3 + a_4 + \omega,$$

$$W = w + w_1.$$

### C. Flugzeit.

Zeit v. *A* bis *D* =  $\tau$ , Bogen *AD* =  $\sigma$ , Geschwindigk. in *L*

„ „ *D* „ *E* =  $\tau_1$ , „ *DE* =  $\sigma_1$ , „ „ *E*

„ „ *E* „ *F* =  $\tau_2$ , „ *EF* =  $\sigma_2$ , „ „ *F*

„ „ *F* „ *G* =  $\tau_3$ , „ *FG* =  $\sigma_3$ , „ „ *G*

„ „ *G* „ *C* =  $\tau_4$ , „ *GC* =  $\sigma_4$ , „ „ *C*

$$u = 6ku,$$

$$u_1 = 6ku_1,$$

$$u_2 = 6ku_2,$$

$$u_3 = 6ku_3,$$

$$v_1 = \frac{\sqrt{2gk}}{\cos \alpha_1 \sqrt{L - Ap_1}}, \quad v_2 = \frac{\sqrt{2gk}}{\cos \alpha \sqrt{L + Ap}}$$

$$V_1 = \sqrt{\frac{2gk}{L}}, \quad V_2 = \frac{\sqrt{2gk}}{\cos \varepsilon \sqrt{L + A \operatorname{tg} \varepsilon}}$$

$$s = \frac{1}{M} k \log \left( \frac{L + A \operatorname{tg} \varepsilon}{L + Ap} \right), \quad v_2 = \frac{\sqrt{2gk}}{\cos \alpha_1 \sqrt{L + Ap_1}},$$

$$\tau = \frac{2\sigma}{V + v_1} + \frac{1}{2} \left( \frac{2\sigma}{V + v_1} \right)^2 \left[ \frac{V - v_1}{2k} + \frac{g(\sin \alpha - \sin \alpha_1)}{V + v_1} \right],$$

$$\tau_1 = \frac{2\sigma_1}{v_1 + V_1} + \frac{1}{2} \left( \frac{2\sigma_1}{v_1 + V_1} \right)^2 \left[ \frac{v_1 - V_1}{2k} + \frac{g \sin \alpha_1}{v_1 + V_1} \right],$$

$$\tau_2 = \frac{2\sigma_2}{V_1 + v_2} + \frac{1}{2} \left( \frac{2\sigma_2}{V_1 + v_2} \right)^2 \left[ \frac{V_1 - v_2}{2k} + \frac{g \sin \alpha_1}{V_1 + v_2} \right],$$

$$\tau_3 = \frac{2\sigma_3}{v_2 + v_3} + \frac{1}{2} \left( \frac{2\sigma_3}{v_2 + v_3} \right)^2 \left[ \frac{v_2 - v_3}{2k} + \frac{g(\sin \alpha - \sin \alpha_1)}{v_2 + v_3} \right],$$

$$\tau_4 = \frac{2\sigma_4}{v_3 + V_2} + \frac{1}{2} \left( \frac{2\sigma_4}{v_3 + V_2} \right)^2 \left[ \frac{v_3 - V_2}{2k} + \frac{g(\sin \varepsilon - \sin \alpha)}{v_3 + V_2} \right].$$

## §. 12.

Beträgt (Taf. VIII. Fig. 9.) der Elevationswinkel  $\alpha$  zwischen  $\bullet$  und  $45^\circ$ , so wird man ihn, um sichere Resultate zu erhalten, drei gleiche Theile theilen, wo sich dann folgende Vorschriften für die Rechnung ergeben:

$$k = \frac{1}{\lambda \gamma} \cdot \frac{Q}{F} = 3.3445 \frac{Q}{F},$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{3}\alpha, \quad \alpha_2 = \frac{1}{3}\alpha,$$

$$p = \operatorname{tg} \alpha, \quad p_1 = \operatorname{tg} \alpha_1, \quad p_2 = \operatorname{tg} \alpha_2,$$

$$L = \frac{2gk}{V^2 \cos^2 \alpha} + Ap.$$

### A. Aufsteigender Ast.

$$\log u = 9.58406 + \log \left( \log \frac{L - Ap_1}{L - Ap} \right),$$

$$\operatorname{tg} \kappa = \frac{1}{2}(p + p_1) + \frac{1}{2}(p - p_1)u,$$

$$a = 6k \cdot \frac{u \cos \kappa}{\mathcal{F} \left[ \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\alpha - \kappa) \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\kappa - \alpha_1) \right]},$$

$$h = a \operatorname{tg} \kappa;$$

$$\log u_1 = 9.58406 + \log \left( \log \frac{L - \Delta p_2}{L - \Delta p_1} \right),$$

$$\operatorname{tg} \kappa_1 = \frac{1}{2}(p_1 + p_2) + \frac{1}{2}(p_1 - p_2)u_1,$$

$$a_1 = 6k \cdot \frac{u_1 \cos \kappa_1}{\mathcal{F}[\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\alpha_1 - \kappa_1) \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\kappa_1 - \alpha_2)]},$$

$$h_1 = a_1 \operatorname{tg} \kappa_1;$$

$$\log u_2 = 9.58406 + \log \left( \log \frac{L}{L - \Delta p_2} \right),$$

$$\operatorname{tg} \kappa_2 = \frac{1}{2}p_2(1 + u_2),$$

$$a_2 = 6k \cdot \frac{u_2 \cos \kappa_2}{\mathcal{F}[\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\alpha_2 - \kappa_2) \operatorname{tg} \frac{1}{2}\kappa_2]},$$

$$h_2 = a_2 \operatorname{tg} \kappa_2,$$

$$w = a + a_1 + a_2,$$

$$H = h + h_1 + h_2.$$

#### B. Niedersteigender Ast.

$$\log u_3 = 9.58406 + \log \left( \log \frac{L + \Delta p_2}{L} \right),$$

$$\operatorname{tg} \kappa_3 = \frac{1}{2}p_2(1 - u_3),$$

$$a_3 = 6k \cdot \frac{u_3 \cos \kappa_3}{\mathcal{F}[\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\alpha_2 - \kappa_3) \operatorname{tg} \frac{1}{2}\kappa_3]},$$

$$h_3 = a_3 \operatorname{tg} \kappa_3;$$

$$\log u_4 = 9.58406 + \log \left( \log \frac{L + \Delta p_1}{L + \Delta p_2} \right),$$

$$\operatorname{tg} \kappa_4 = \frac{1}{2}(p_1 + p_2) - \frac{1}{2}(p_1 - p_2)u_4,$$

$$a_4 = 6k \cdot \frac{u_4 \cos \kappa_4}{\mathcal{F}[\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\alpha_1 - \kappa_4) \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\kappa_4 - \alpha_2)]},$$

$$h_4 = a_4 \operatorname{tg} \kappa_4;$$

$$\log u_5 = 9.58406 + \log \left( \log \frac{L + \Delta p}{L + \Delta p_1} \right),$$

$$\operatorname{tg} \kappa_5 = \frac{1}{2}(p + p_1) - \frac{1}{2}(p - p_1)u_5,$$

$$a_5 = 6k \cdot \frac{u_5 \cos \kappa_5}{\mathcal{F}[\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\alpha - \kappa_5) \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\kappa_5 - \alpha_1)]},$$

$$h_5 = a_5 \operatorname{tg} \kappa_5;$$

$$p_6 = \sqrt{\frac{HL}{k}} \left( 1 + \frac{1}{3L} \sqrt{\frac{HL}{k}} \right)^2,$$

$$\operatorname{tg} \alpha_6 = p_6.$$

$$\log u_0 = 9.58406 + \log \left( \log \frac{L + \Delta p_0}{L + \Delta p} \right),$$

$$\operatorname{tg} \kappa_0 = \frac{1}{2}(p_0 + p) - \frac{1}{2}(p_0 - p)u_0,$$

$$a_0 = 6k \cdot \frac{u_0 \cos \kappa_0}{\mathcal{F}[\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\alpha_0 - \kappa_0) \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\kappa_0 - \alpha)]},$$

$$h_0 = a_0 \operatorname{tg} \kappa_0,$$

$$\zeta = H - (h_3 + h_4 + h_5 + h_6),$$

$$J = \frac{L + \Delta p_0}{4kp_0},$$

$$\omega = \frac{\frac{\zeta}{p_0}}{1 + J \frac{\zeta}{p_0}},$$

$$\operatorname{tg} \varepsilon = p_0(1 + 2J\omega),$$

$$w_1 = a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + \omega,$$

$$W = w + w_1.$$

## C. Flugzeit. (Taf. VIII. Fig. 9.)

Zeit v.  $A$  bis  $D = \tau$ , Bogen  $AD = \sigma$ , Geschwindigk. in  $D = v_1$ .

„ „  $D$  „  $E = \tau_1$ , „  $DE = \sigma_1$ , „ „  $E = v_2$ .

„ „  $E$  „  $F = \tau_2$ , „  $EF = \sigma_2$ , „ „  $F = V_1$ .

„ „  $F$  „  $G = \tau_3$ , „  $FG = \sigma_3$ , „ „  $G = v_3$ .

„ „  $G$  „  $H = \tau_4$ , „  $GH = \sigma_4$ , „ „  $H = v_4$ .

„ „  $H$  „  $J = \tau_5$ , „  $HJ = \sigma_5$ , „ „  $J = v_5$ .

„ „  $J$  „  $C = \tau_6$ , „  $JC = \sigma_6$ , „ „  $C = V_2$ .

$$\sigma = 6ku,$$

$$\sigma_1 = 6ku_1,$$

$$\sigma_2 = 6ku_2,$$

$$\sigma_3 = 6ku_3,$$

$$\sigma_4 = 6ku_4,$$

$$\sigma_5 = 6ku_5,$$

$$\sigma_6 = \frac{1}{M} k \log \left( \frac{L + \Delta \operatorname{tg} \varepsilon}{L + \Delta p} \right),$$

$$v_1 = \frac{\sqrt{2gk}}{\cos \alpha_1 \sqrt{L - \Delta p_1}}, \quad v_4 = \frac{\sqrt{2gk}}{\cos \alpha_1 \sqrt{L + \Delta p_1}},$$

$$v_2 = \frac{\sqrt{2gk}}{\cos \alpha_2 \sqrt{L - \Delta p_2}}, \quad v_5 = \frac{\sqrt{2gk}}{\cos \alpha \sqrt{L + \Delta p}},$$

$$V_1 = \frac{\sqrt{2gk}}{\sqrt{L}}, \quad V_2 = \frac{\sqrt{2gk}}{\cos \varepsilon \sqrt{L + \Delta \operatorname{tg} \varepsilon}},$$

$$v_3 = \frac{\sqrt{2gk}}{\cos \alpha_3 \sqrt{L + \Delta p_3}},$$

$$\tau = \frac{2\sigma}{V + v_1} + \frac{1}{2} \left( \frac{2\sigma}{V + v_1} \right)^2 \left[ \frac{V - v_1}{2k} + \frac{g(\sin \alpha - \sin \alpha_1)}{V + v_1} \right],$$

$$\tau_1 = \frac{2\sigma_1}{v_1 + v_2} + \frac{1}{2} \left( \frac{2\sigma_1}{v_1 + v_2} \right)^2 \left[ \frac{v_1 - v_2}{2k} + \frac{g(\sin \alpha_1 - \sin \alpha_2)}{v_1 + v_2} \right],$$



$$\log \theta = 0.77816 \quad \log \theta k = 4.47507$$

$$\log \operatorname{tg} \alpha = 9.42806, \text{ daher } p = 0.96793.$$

Mit diesen Werthe von  $p$  erhält man aus Tafel I. den Werth von  $Ap$ .

$$\log V = 2.47712$$

$$\log \cos \alpha = 9.98494$$

$$\log V \cos \alpha = 2.46206$$

$$\log V^2 \cos^2 \alpha = 4.92412$$

$$\log g = 0.99167$$

$$\log 2k = 3.99796$$

$$\text{Comp. log } (V^2 \cos^2 \alpha) = 5.07588$$

$$\log 1.1628 = 0.06550$$

$$\log \frac{L}{L - Ap} = 0.16625$$

$$\log 0.16625 = 9.22076$$

$$\log u = 8.80452$$

$$\log (1 + u) = 0.02686$$

$$\log p = 9.42806$$

$$\log \frac{1}{2} = 9.69897$$

$$\log \operatorname{tg} \alpha = 9.15388$$

$$z = 8^\circ 6' 41''$$

$$Ap = 0.5423$$

$$\frac{2kg}{V^2 \cos^2 \alpha} = 1.1628$$

$$L = 1.7061$$

$$L - Ap = 1.1628$$

$$L + Ap = 2.2474$$

$$\frac{1}{2} z = 4^\circ 3' 20''$$

$$\frac{1}{2} \alpha = 7^\circ 30' 0$$

$$\frac{1}{2}(\alpha - z) = 3^\circ 26' 40$$

$$\log \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\alpha - z) = 8.77952$$

$$\log \operatorname{tg} \frac{1}{2} z = 8.85066$$

$$\frac{1}{2} z = 4^\circ 3' 20''$$

$$\log 6k = 4.47507$$

$$\log u = 8.80452$$

$$\log \cos \alpha = 9.98494$$

$$\frac{1}{2} z = 4^\circ 3' 20''$$

$$\log \frac{1}{2}[\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\alpha - z) \operatorname{tg} \frac{1}{2} z] = 0.00124$$

$$\log w = 3.27429$$

$$\log \operatorname{tg} \alpha = 9.15388$$

$$\log H = 2.42817$$



Mit diesem Werthe in die durch A. bezeichnete Spalte der Tafel II. eingegangen erhält man  $B = 0.00124$ .  
 Danach finden sich die Coordinaten des höchsten Punktes  $w = 1880.56$ ,  $H = 268.02$ .

# Niedersteigender Ast.

$$\begin{aligned} \log \frac{L + Ap}{L} &= 0.11993 \\ \log 0.11993 &= 9.07893 \\ &\quad \underline{9.58406} \\ \log u_1 &= \underline{8.66299} \\ \log \frac{1}{u_1} &= 1.33701 \\ \log \left( \frac{1}{u_1} - 1 \right) &= 1.31655 \\ \log (1 - u_1) &= 9.97954 \\ \log \frac{1}{2} p &= 9.12702 \\ \log \lg u_1 &= \underline{9.10656} \\ x_1 &= 7^\circ 17' 0'' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log H &= 2.42817 \\ \log L &= 0.23175 \\ \log \frac{1}{k} &= 6.30308 \\ &\quad \underline{8.96300} \\ r &= 77 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} x_1 &= 3^\circ 38' 30'' & \log 6k &= 4.47607 \\ \frac{1}{2} \alpha &= 7 \ 30 \ 0 & \log u_1 &= 8.66299 \\ \frac{1}{2} (\alpha - x_1) &= 3 \ 51 \ 30 & \log \cos x_1 &= 9.99648 \\ & & &\quad \underline{3.13454} \\ \log \lg \frac{1}{2} (\alpha - x_1) &= 8.82893 & \log f &= 0.00125 \\ \log \lg \frac{1}{2} x_1 &= \underline{8.80377} & \log a_1 &= \underline{3.13329} \\ & & \log \lg u_1 &= 9.10656 \\ & & \log h_1 &= \underline{2.23985} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_1 &= 1359.23 \\ h_1 &= 173.72 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log 3 &= 0.47712 & \alpha_2 &= 18^\circ 46' 44'' \\ \log L &= 0.23175 & Ap_2 &= 0.6929 \\ \log 3L &= \underline{0.70887} & L &= 1.7061 \\ & & &\quad \underline{9.48150} \\ \log \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{HL}{L}} &= 8.77263 & L + Ap_2 &= \underline{2.3980} \end{aligned}$$

Nell: Wurfbewegung im widerstehenden Mittel

$\log u_2 = \underline{8.03385}$	$\frac{1}{2}(p_2 - p) = 0.00000$		
$\log \frac{1}{2}(p_2 - p) = \underline{8.55671}$	$\frac{\alpha_2}{2} = 9^\circ 23' 22''$		
$\log \frac{1}{2}(p_2 + p) = \underline{9.48285}$	$\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} = 0^\circ 56' 44''$		$\log \lg 8.218$
$\log \lg \alpha_2 = \underline{9.48229}$	$\frac{\alpha_2 - \alpha}{2} = 0^\circ 56' 38''$		$\log \lg 8.217$
$\alpha_2 = 16^\circ 53' 16''$	$\frac{\alpha}{2} = 7^\circ 30' 0''$		$\underline{6.435}$
$\log 6k = 4.47507$	$\log(L + Ap_2) = 0.37985$	$\omega = 1.62$	
$\log u_2 = 8.03385$	$\log \frac{1}{4k} = 5.70102$	$a_1 = 1359.23$	
$\log \cos \alpha_2 = \underline{9.98086}$	$\log \frac{1}{p_2} = 0.46850$	$a_2 = \underline{308.82}$	
$\log \mathcal{F} = \underline{0.00008}$	$\log J = \underline{6.54937}$	$w_1 = \underline{1669.67}$	
$\log a_2 = \underline{2.48970}$	$\log J \frac{\zeta}{p_2} = 6.75823$	$w = 1880.56$	
$\log \lg \alpha_2 = 9.48229$	$\log(1 + J \frac{\zeta}{p_2}) = 0.00025$	$W = \underline{3550.23}$	
$\log h_2 = \underline{1.97189}$	$\log \omega = \underline{0.20861}$		
	$\log 2J = 6.85040$		
	$\log 2J\omega = \underline{7.05901}$		
	$\log(1 + 2J\omega) = 0.00050$		
	$\log p_2 = 9.53150$		
	$\log \lg \varepsilon = \underline{9.53200}$		
	$\varepsilon = 18^\circ 47' 57''$		

Berechnung der Flugzeit.

$$\log(L + A \operatorname{tg} \varepsilon) = 0.38001.$$

$$\log \cos \varepsilon = 9.97620$$

$$\log \sqrt{L + A \operatorname{tg} \varepsilon} = \frac{0.19000}{0.16620}$$

$$\log V_2 = \frac{2.49481}{2.32861}$$

$$\operatorname{tg} \varepsilon = 0.34041, \quad A(\operatorname{tg} \varepsilon) = 0.6938, \quad L + A \operatorname{tg} \varepsilon = 2.3989,$$

$$\log 2k = 3.99795$$

$$\log g = \frac{0.99167}{4.98962}$$

$$\log \cos \alpha = 9.98494$$

$$\log \sqrt{L + Ap} = \frac{0.17584}{0.16078}$$

$$\log \sqrt{2kg} = \frac{2.49481}{2.33403}$$

$$\log \sqrt{2kg} = 2.49481$$

$$\log \sqrt{L} = 0.11588$$

$$\log V_1 = \frac{2.37893}{2.37893}$$

$$V = 300.00$$

$$V_1 = 239.30$$

$$V_2 = 215.79$$

$$V_3 = 213.11$$

$$V + V_1 = 539.30$$

$$V_1 + V_2 = 455.09$$

$$V_2 + V_3 = 428.90$$

$$V - V_1 = 60.70$$

$$V_1 - V_2 = 23.51$$

$$V_2 - V_3 = 2.68$$

$$\log(L + A \operatorname{tg} \varepsilon) = 0.38001$$

$$\log(L + Ap) = \frac{0.35168}{\log 0.02833} = 8.45225$$

$$\log k = 3.69692$$

$$\operatorname{Comp.} \log M = \frac{0.36222}{2.51130}$$

$$\log \sigma_2 = 2.51130$$

$$\log 6k = 4.47507$$

$$\log u = \frac{8.80482}{3.27989}$$

$$\log \sigma = 3.27989$$

$$\log 2\sigma = 3.58092$$

$$\log(V + V_1) = \frac{2.73183}{0.84909}$$

$$\log 6k = 4.47507$$

$$\log u_1 = \frac{8.66299}{3.13806}$$

$$\log \sigma_1 = 3.13806$$

$$\log 2\sigma_1 = 3.43909$$

$$\log(V_1 + V_2) = \frac{2.65810}{0.78099}$$

$$\log 2\sigma_2 = 2.81242$$

$$\log(V_2 + V_3) = \frac{2.63236}{0.18006}$$

$$\frac{2\sigma_2}{V_2 + V_3} = 1.5138$$

$$\frac{2\sigma_1}{V_1 + V_2} = 6.0393$$

$$\frac{2\sigma}{V + V_1} = 7.0646$$

$$\begin{aligned}\log g \sin \alpha &= 0.40467 \\ \log g \sin \varepsilon &= 0.49986 \\ &\quad - 0.09519 \\ &\quad 9.38926 \\ \log g (\sin \varepsilon - \sin \alpha) &= 9.79392 \\ \log (V_2 + V_3) &= 2.63236 \\ &\quad 7.16156 \\ \log \frac{V_2 - V_3}{2k} &= 6.43018 \\ &\quad 0.73138 \\ &\quad 0.80532 \\ &\quad 7.23550 \\ \log i &= 9.22185 \\ &\quad 0.36012 \\ \log 0.000657 &= 6.81747\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\log g &= 0.99167 \\ \log \sin \alpha &= 9.41300 \\ \log \sin \varepsilon &= 9.50819 \\ \log \frac{g \sin \alpha}{V_1 + V_2} &= 7.74657 \\ &\quad \frac{7.37330}{0.37327} \cdot \\ &\quad \frac{0.52659}{7.89989} \\ \log i &= 9.22185 \\ &\quad \frac{1.56198}{\log 0.0483 = 8.68372}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\log \frac{V - V_1}{2k} &= 7.70024 \\ \log \frac{V_1 - V_2}{2k} &= 7.37330 \\ \log \frac{V_2 - V_3}{2k} &= 6.43018 \\ \log \frac{g \sin \alpha}{V + V_1} &= 7.67284 \\ \log \frac{V - V_1}{2k} &= \frac{7.78524}{9.88760} \\ &= \frac{0.24845}{8.03369} \\ \log t &= 9.22185 \\ \log 0.0899 &= \frac{1.69818}{8.95372}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Comp. log } 2A &= 6.00206 \\ \log(V - V_1) &= 1.78319 \\ \log(V_1 - V_2) &= 1.37125 \\ \log(V_2 - V_3) &= 0.42813 \\ \log \sin \alpha &= 0.40467 \\ \log(V + V_1) &= 2.73183 \\ \log(V_1 + V_2) &= 2.65810\end{aligned}$$

<b>7.0646</b>	<b>6.0393</b>	<b>1.5138</b>
<b>0.0899</b>	<b>0.0483</b>	<b>0.0007</b>
<b><u>7.1545</u></b>	<b><u>6.0876</u></b>	<b><u>1.5145</u></b>
<b><math>\tau =</math></b>	<b><math>\tau_1 =</math></b>	<b><math>\tau_2 =</math></b>

**Hiernach findet sich die ganze Flugzeit gleich 14.7566 Sekunden.**

$$\begin{aligned}\log g \sin \alpha &= 0.40467 \\ \log g \sin \varepsilon &= 0.49986 \\ &\quad - \underline{0.09519} \\ &\quad 9.38926 \\ \log g (\sin \varepsilon - \sin \alpha) &= \underline{9.79392} \\ \log (V_2 + V_3) &= \underline{2.63236} \\ &\quad \underline{7.16156} \\ \log \frac{V_2 - V_3}{2k} &= \underline{6.43018} \\ &\quad \underline{0.73138} \\ &\quad 0.80532 \\ &\quad \underline{7.23550} \\ \log i &= 9.22185 \\ &\quad 0.36012 \\ \log 0.000657 &= \underline{6.81747}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\log g &= 0.99167 \\ \log \sin \alpha &= 9.41300 \\ \log \sin \varepsilon &= 9.50819 \\ \log \frac{g \sin \alpha}{V_1 + V_2} &= 7.74657 \\ &\quad \frac{7.37330}{0.37327} \\ &\quad \frac{0.52659}{7.89989} \\ \log i &= 9.22185 \\ &\quad \frac{1.56198}{\log 0.0483 = 8.68372}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\log \frac{V - V_1}{2k} &= 7.70024 \\ \log \frac{V_1 - V_2}{2k} &= 7.37330 \\ \log \frac{V_2 - V_3}{2k} &= 6.43018 \\ \log \frac{g \sin \alpha}{V + V_1} &= 7.67284 \\ \log \frac{V - V_1}{2k} &= \frac{7.78524}{9.88760} \\ &= \frac{0.24845}{8.03369} \\ \log t &= 9.22185 \\ \log 0.0899 &= \frac{1.69818}{8.95372}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Comp. log } 2A &= 6.00206 \\ \log(V - V_1) &= 1.78319 \\ \log(V_1 - V_2) &= 1.37125 \\ \log(V_2 - V_3) &= 0.42813 \\ \log \sin \alpha &= 0.40467 \\ \log(V + V_1) &= 2.73183 \\ \log(V_1 + V_2) &= 2.65810\end{aligned}$$

<b>7.0646</b>	<b>6.0393</b>	<b>1.5138</b>
<b>0.0899</b>	<b>0.0483</b>	<b>0.0007</b>
<b><u>7.1545</u></b>	<b><u>6.0876</u></b>	<b><u>1.5145</u></b>
<b><math>\tau =</math></b>	<b><math>\tau_1 =</math></b>	<b><math>\tau_2 =</math></b>



$$h_1 + h_2 + h_3 = 267.519, \quad \zeta = 0.485, \quad \omega = 1.43, \quad a_2 + a_3 + a_4 = 1668.02, \\ w_1 = 1669.45, \quad W = 3549.98, \quad \varepsilon = 18^\circ 47' 44''.$$

Hier zeigt sich eine stärkere Differenz; denn die Wurfweite ist nach der früheren Rechnung einen Viertelsmeter grösser. Würde daher eine sehr grosse Genauigkeit verlangt, so müssten bei einem Elevationswinkel, der nicht beträchtlich kleiner ist als  $15^\circ$ , wenigstens für den niedersteigenden Ast die etwas umständlicheren Formeln des §. 11. angewandt werden.

## §. 15.

Zur Anwendung der Formeln des §. 12. wollen wir die Flugbahn des Vierundzwanzigpfunders bei der gleichen Geschwindigkeit von 300 Meter und dem Elevationswinkel von 45 Grad bestimmen.

Hier ist:

$$\alpha = 45^\circ, \quad p = 1.00000, \quad Ap = 2.2956, \\ \alpha_1 = 30, \quad p_1 = 0.57735, \quad Ap_1 = 1.2160, \\ \alpha_2 = 15, \quad p_2 = 0.26795, \quad Ap_2 = 0.5423, \\ g = 9.81, \quad \log k = 3.69692, \quad L = 4.4653.$$

Man erhält die folgenden Werthe:

## 1. Aufsteigender Ast.

$\log u = 8.82807$	$x = 38^\circ 45' 40''$	$a = 1562.74$	$h = 1254.73$
$\log u_1 = 8.49697$	$x_1 = 23 \quad 8 \quad 48$	$a_1 = 859.70$	$h_1 = 367.53$
$\log u_2 = 8.33403$	$x_2 = 7 \quad 47 \quad 35$	$a_2 = 636.53$	$h_2 = 87.12$
		$w = 3058.97$	$H = 1709.38$

## 2. Niedersteigender Ast.

$\log u_3 = 8.28111$	$x_3 = 7^\circ 29' 12''$	$a_3 = 563.93$	$h_3 = 74.11$
$\log u_4 = 8.32300$	$x_4 = 22 \quad 45 \quad 10$	$a_4 = 577.61$	$h_4 = 242.25$
$\log u_5 = 8.46229$	$x_5 = 31 \quad 2 \quad 42$	$a_5 = 679.82$	$h_5 = 531.99$
		$a_3 + a_4 + a_5 = 1821.36$	$h_3 + h_4 + h_5 = 848.35$

$$p_6 = 1.47807 \quad \alpha_6 = 55^\circ 55' 8'' \quad Ap_6 = 3.8202 \\ \log u_6 = 8.53012 \quad x_6 = 50^\circ 54' 38'' \quad a_6 = 637.16 \quad h_6 = 784.32 \\ a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 2458.52 \quad h_3 + h_4 + h_5 + h_6 = 1632.67 \quad \zeta = 76.71 \\ \log J = 6.44965 \quad \omega = 51.15 \quad w_1 = 2509.67 \quad W = 5568.64 \quad \varepsilon = 56^\circ 40' 13''.$$

Sollten diese Resultate geprüft werden, so könnte man den Winkel  $\alpha$  in vier gleiche Theile theilen und  $\alpha_1 = \frac{1}{4}\alpha$ ,  $\alpha_2 = \frac{1}{4}\alpha$ ,







## A n h a n g.

## §. 17.

Die dieser Abhandlung beigegebene Tafel I. kann noch andere Weise gebraucht werden. Sie gibt nämlich für den Werth der Zahl  $p$  den zugehörigen Werth von  $\mathcal{A}(p)$ , wo die folgende Funktion von  $p$  ist:

$$\mathcal{A}(p) = p \sqrt{1+p^2} + \log \text{nat} (p + \sqrt{1+p^2}).$$

Nun ist:

$$\int dx \sqrt{1+x^2} = \text{Const.} + \frac{1}{2} [x \sqrt{1+x^2} + l(x + \sqrt{1+x^2})] = \text{Const.} + \frac{1}{2}$$

folglich:

$$\int_{x'}^{x''} dx \sqrt{1+x^2} = \frac{1}{2} [\mathcal{A}(x'') - \mathcal{A}(x')].$$

Durch die Tafel I. kann man daher sehr leicht den Werth des bestimmten Integrals finden.

## §. 18.

Durch die Tafel I. lässt sich ferner die Parabel sehr leicht rektificiren. Sei der Abstand des Brennpunkts  $B$  (Taf. VIII. Fig. 1) vom Scheitel  $A$  gleich  $q$ , so heisst die Gleichung dieser Curve

$$y^2 = 4qx,$$

$$ds = dy \sqrt{1 + \frac{y^2}{4q^2}}; \quad s = \frac{1}{2} y \sqrt{1 + \frac{y^2}{4q^2}} + ql \left( \frac{y}{2q} + \sqrt{1 + \frac{y^2}{4q^2}} \right)$$

Die Constante ist gleich 0, wenn die Bögen vom Scheitel gezählt werden.

$$\frac{s}{q} = \frac{y}{2q} \sqrt{1 + \left( \frac{y}{2q} \right)^2} + l \left( \frac{y}{2q} + \sqrt{1 + \left( \frac{y}{2q} \right)^2} \right) = \mathcal{A} \left( \frac{y}{2q} \right) = \mathcal{A} \left( \sqrt{\frac{x}{q}} \right)$$

$$s = q \cdot \mathcal{A} \left( \sqrt{\frac{x}{q}} \right).$$

Setzt man den Leitstrahl  $BC = r$ , den Winkel  $ABC = v$ , so

$$r = \frac{2q}{1 + \cos v}, \quad x = q + r \cos(180^\circ - v) = q - \frac{2q \cos v}{1 + \cos v},$$



dann ist  $x_1 = x_0 + \delta$ ,  $x_2 = x_1 + \delta, \dots, x_n = x_{n-1} + \delta$ . Man rechnet jetzt für diese sämtlichen Abscissen die zugehörigen Ordinaten  $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$  mittelst der Gleichung der Curve bilde die ersten und zweiten Differenzen nach dem folgenden Schema

$x_0$	$y_0$		
		$\Delta y_0$	
$x_1$	$y_1$		$\Delta' y_0$
		$\Delta y_1$	
$x_2$	$y_2$		$\Delta' y_1$
		$\Delta y_2$	
$x_3$	$y_3$		$\Delta' y_2$
		$\Delta y_3$	
$x_4$	$y_4$		$\Delta' y_3$
		$\Delta y_4$	
. . . . .			
$x_{n-2}$	$y_{n-2}$		
		$\Delta y_{n-2}$	
$x_{n-1}$	$y_{n-1}$		$\Delta' y_{n-2}$
		$\Delta y_{n-1}$	
$x_n$	$y_n$		

Beim Bogen  $ABC$  ist

$$\mu = y_1 - y_0 = \Delta y_0 \quad \text{und} \quad v = y_2 - y_0 = \Delta y_0 + \Delta y_1,$$

$$v - 2\mu = \Delta' y_0, \quad 3v - 4\mu = 2\Delta y_1 - \Delta' y_0, \quad 4\mu - v = 2\Delta y_0 - \Delta' y_1$$

Analog findet man diese Werthe beim Bogen  $CDE$ , indem jeden Index um 2 vergrössert. Setzt man  $ABC = s_2$ ,  $CDE = s_4$ ,  $XYZ = s_n$ , so ist:

$$s_2 = \frac{\delta^2}{2\Delta' y_0} \left\{ A\left(\frac{\Delta y_1 + \frac{1}{2}\Delta' y_0}{\delta}\right) - A\left(\frac{\Delta y_0 - \frac{1}{2}\Delta' y_0}{\delta}\right) \right\},$$

$$s_4 = \frac{\delta^2}{2\Delta' y_2} \left\{ A\left(\frac{\Delta y_3 + \frac{1}{2}\Delta' y_2}{\delta}\right) - A\left(\frac{\Delta y_2 - \frac{1}{2}\Delta' y_2}{\delta}\right) \right\},$$

. . . . .

$$s_n = \frac{\delta^2}{2\Delta' y_{n-2}} \left\{ A\left(\frac{\Delta y_{n-1} + \frac{1}{2}\Delta' y_{n-2}}{\delta}\right) - A\left(\frac{\Delta y_{n-2} - \frac{1}{2}\Delta' y_{n-2}}{\delta}\right) \right\}$$

$$\text{arc } ABCDE \dots XYZ = s_2 + s_4 + \dots + s_n.$$

## §. 20.

Zur Anwendung des Vorhergehenden wollen wir einen optischen Quadranten rektificiren.



$\Delta y_1 = 1.64110$	$\Delta(0.56440) = 1.1862$	$\log(\frac{1}{2}\delta^2) = 9.09691$	$s_2 = 6.12690$
$\frac{1}{2}\Delta' y_0 = -1.35890$	$\Delta(11.43560) = 134.4037$	$\log(133.2175_n) = 2.12455_n$	
$\Delta y_0 = 4.35890$	$-133.2175$	$C\log \Delta' y_0 = 9.56578_n$	
		$\log s_2 = 0.78724$	
$\Delta y_3 = 0.85857$	$\Delta(1.43428) = 3.6656$	$\log(\frac{1}{2}\delta^2) = 9.09691$	
$\frac{1}{2}\Delta' y_2 = -0.14143$	$\Delta(2.56572) = 8.7366$	$\log(5.0710_n) = 0.70509_n$	
$\Delta y_2 = 1.14143$	$-5.0710$	$C\log \Delta' y_2 = 0.54843_n$	
		$\log s_4 = 0.35043$	$s_4 = 2.24095$
$\Delta y_6 = 0.50490$	$\Delta(0.85444) = 1.8985$	$\log(\frac{1}{2}\delta^2) = 9.09691$	
$\frac{1}{2}\Delta' y_4 = -0.07768$	$\Delta(1.47586) = 3.8124$	$\log(1.9139_n) = 0.28192_n$	
$\Delta y_4 = 0.66025$	$-1.9139$	$C\log \Delta' y_4 = 0.80869_n$	
		$\log s_6 = 0.18752$	$s_6 = 1.54000$
$\Delta y_7 = 0.25857$	$\Delta(0.40146) = 0.8240$	$\log(\frac{1}{2}\delta^2) = 9.09691$	
$\frac{1}{2}\Delta' y_6 = -0.05784$	$\Delta(0.86416) = 1.9241$	$\log(1.1001_n) = 0.04143_n$	
$\Delta y_6 = 0.37424$	$-1.1001$	$C\log \Delta' y_6 = 0.93677_n$	
		$\log s_8 = 0.07511$	$s_8 = 1.18878$
$\Delta y_9 = 0.05013$	$\Delta(-0.00152) = -0.0030$	$\log(\frac{1}{2}\delta^2) = 9.09691$	
$\frac{1}{2}\Delta' y_8 = -0.05089$	$\Delta(0.40560) = 0.8329$	$\log(0.8359_n) = 9.92215_n$	
$\Delta y_8 = 0.15191$	$-0.8359$	$C\log \Delta' y_8 = 0.99234_n$	
		$\log s_{10} = 0.01140$	$s_{10} = 1.02660$

Mit Hülfe elliptischer Integrale findet sich auf 5 Decimalen genau  $s = 12.11056$

Fehler  $= -0.01267$

Werden die einzelnen elliptischen Bögen  $s_2, s_4, \dots$  mittelst elliptischer Integrale berechnet, so findet sich:  $s_2 = 6.11427, s_4 = 2.24091, s_6 = 1.53991, s_8 = 1.18879, s_{10} = 1.02660$

Es hat also nur der Fehler von  $s_2$  einen beträchtlichen Werth, was einestheils davon herrührt, dass dieser Bogen zu gross ist, als dass die Parabel sich sehr nahe an denselben anschliessen könnte; anderntheils aber davon, dass für  $x=0$  der elliptische Bogen mit der Abscissenaxe einen rechten Winkel bildet, während die Parabel (deren Gleichung  $y = ax + bx^2$ ) keine zur Abscissenaxe senkrechte Tangente haben kann.

Es lässt sich desshalb der Bogen  $s_2$  durch die Parabel nicht so genau bestimmen wie die übrigen Bögen, und wollen wir diess nun auf einem anderen Wege versuchen.

### §. 21.

Ein Mittel zu einer genaueren Berechnung des Bogens  $s_2$  bietet uns der in §. 6. angeführte Satz und können wir die danach abgeleitete Gleichung 49) benützen. Doch wollen wir den Bogen in zwei Theile zerlegen, da er zu gross ist, um auf einmal mit genügender Genauigkeit erhalten zu werden. Damit übrigens die beiden Theile  $AB = \sigma_1$  (Taf. VIII. Fig. 15.) und  $BC = \sigma_2$  nicht zu ungleich ausfallen, setzen wir  $x_1 = \frac{1}{4}x_2$ . Es ist daher:

$$\begin{array}{llll} x_1 = 0.25 & x_2 - x_1 = 0.75 & y_1 = \frac{1}{4}\sqrt{39} = 3.1225 & y_2 - y_1 = 2.8775 \\ x_2 = 1.00 & & y_2 = 6.0 \end{array}$$

Bezeichnen wir die Tangentenwinkel in den Punkten  $A, B, C$  durch  $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$  und die Sehnenwinkel  $BAD$  durch  $\kappa_0$ ,  $CBF$  durch  $\kappa_1$ , so ist:

$$\begin{aligned} \varphi_0 = 90^\circ, \quad \operatorname{tg} \varphi_1 &= \frac{4(5-x_1)}{y_1} = \frac{19}{y_1}, \quad \operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{4(5-x_2)}{y_2} = \frac{8}{3}, \quad \operatorname{tg} \kappa_0 = \frac{y_1}{x_1}, \\ \operatorname{tg} \kappa_1 &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \end{aligned}$$

Setzt man Sehne  $AB = c_1$ ,  $BC = c_2$ , so ist:

$$c_1 = \frac{y_1}{\sin \kappa_0}, \quad c_2 = \frac{y_2 - y_1}{\sin \kappa_1}.$$

Nach Formel 49) hat man:

$$\sigma_1 = c_1 \cdot \mathcal{F}[\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\varphi_0 - \kappa_0) \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\kappa_0 - \varphi_1)], \quad \sigma_2 = c_2 \cdot \mathcal{F}[\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\varphi_1 - \kappa_1) \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\kappa_1 - \varphi_2)]$$

$\log 19 = 1.27875$	$\log y_1 = 0.49450$	$\log y_1 = 0.49450$
$\log y_1 = 0.49450$	$\log x_1 = 9.39794$	$\log \sin \kappa_0 = 9.99861$
$\log \operatorname{tg} \varphi_1 = 0.78425$	$\log \operatorname{tg} \kappa_0 = 1.09656$	$\log c_1 = 0.49589$
$\varphi_1 = 80^\circ 40' 2''$	$\kappa_0 = 85^\circ 25' 21''$	

$\frac{1}{2}\varphi_0 = 45^\circ 0' 0''$	$\log 8 = 0.90309$	$\log(y_2 - y_1) = 0.45901$	$\log(y_2 - y_1) = 0.45901$
$\frac{1}{2}\kappa_0 = 42 42 40$	$\log 3 = 0.47712$	$\log \sin \kappa_1 = 9.98571$	$\log \sin \kappa_1 = 9.98571$
$\frac{1}{2}\varphi_1 = 40 20 1$	$\log \operatorname{tg} \varphi_2 = 0.42597$	$\log \operatorname{tg} \kappa_1 = 0.58395$	$\log c_2 = 0.47329$
$\frac{1}{2}\kappa_1 = 37 41 44$	$\varphi_2 = 69^\circ 26' 38''$	$\kappa_1 = 75^\circ 23' 28''$	
$\frac{1}{2}\varphi_2 = 34 43 19$			
	$\frac{1}{2}(\varphi_0 - \kappa_0) = 2^\circ 17' 20''$	$\log \operatorname{tang}$	$\log [\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\varphi_0 - \kappa_0) \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\kappa_0 - \varphi_1)] = 7.21998$
	$\frac{1}{2}(\kappa_0 - \varphi_1) = 2 22 39$	8.60173	$\log [\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\varphi_1 - \kappa_1) \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\kappa_1 - \varphi_2)] = 7.37901$
	$\frac{1}{2}(\varphi_1 - \kappa_1) = 2 38 17$	8.61825	
	$\frac{1}{2}(\kappa_1 - \varphi_2) = 2 58 25$	8.66347	
		8.71554	
	$\log c_1 = 0.49589$	$\log c_2 = 0.47329$	$\sigma_1 = 3.13590$
	$\log \mathfrak{f}_1 = 0.00048$	$\log \mathfrak{f}_2 = 0.00069$	$\sigma_2 = 2.97840$
	$\log \sigma_1 = 0.49637$	$\log \sigma_2 = 0.47398$	$s_2 = 6.11430$

Da der genauere Werth von  $s_2 = 6.11427$ , so ist der Fehler  $= -0.00003$ .  
Bilden wir nun die Summe der einzelnen Bögen, so findet sich:

$s_2 = 6.11430$
$s_4 = 2.24095$
$s_6 = 1.54000$
$s_8 = 1.18878$
$s_{10} = 1.02660$
$s = 12.11063$

Resultat ist gleich  $-0.00007$ .

Die

Von  $p = 0$  bis  $p = 100$  sind die  
Intervalle deren Differenzen interpolirt  
werden. Stangegeben, die in folgender  
Weise gebrau

Sei

Beiß,

$$9.1014 = 648.5616.$$

Die Werthe von  $p$  werden in  
der Anwendungse sich folgende Formel





## XXI.

**Eine stereometrische Schulaufgabe, welche zu einer leichten Inhaltsbestimmung eines Ellipsoides führt.**

Von

Herrn *Hermann Martus*,

Oberlehrer an der Königstädtischen Realschule in Berlin.

Es sei (Taf. IX. Fig. I.)  $MPAA'P'$  ein Quadrant eines geraden Kreiscylinders. Man lege durch  $PM$  in beliebiger Richtung den Schnitt  $PBM$ , trage in den Kreisquadranten  $PA$  eine Sehne  $CD$  ein, lege durch ihre Endpunkte, sowie durch ihren Halbirungspunkt  $L$  Ebenen parallel der Grundfläche  $MAB$ , so sind die entstehenden Durchschnittsdreiecke dem rechtwinkligen Grunddreiecke  $MAB$  ähnlich, weshalb:

$$LO:LJ = AB:AM = s:r,$$

also:

$$LO = \frac{LJ}{r} \cdot s.$$

Ebenso folgt:

$$CD:k = LM:LJ = q:LJ,$$

mithin:

$$CD = \frac{q}{LJ} \cdot k;$$

und deshalb ist der Inhalt des bei  $C$  und  $D$  rechtwinkligen Trapezes  $CDFE$ :

$$t = LO \cdot CD = \frac{q}{r} s \cdot k.$$

Trägt man nun die Sehne  $CD$  mehrmals hinter einander in den Bogen  $PA$  ein, so ist die Summe aller solcher Trapeze:

$$\Sigma t = \frac{\rho}{r} s \cdot \Sigma k,$$

und wenn auf  $PM$

$$\Sigma k = h$$

ist,

$$1) \dots \dots \dots \Sigma t = \frac{\rho}{r} sh.$$

Ganz ebenso ergibt sich für die durch ihren Berührungspunkt halbirte Tangente  $C'D'$ , dass das äussere Trapez  $C'D'FE'$

$$T = s \cdot k'$$

ist, dass also die Summe solcher berührenden Trapeze, deren Breite stets  $= C'D'$  ist,

$$2) \dots \dots \dots \Sigma T = s \Sigma k' = sh$$

wird.

Je schmaler die Trapeze werden, desto mehr gehen beide Summen über in einen Streifen des Cylindermantels:

$$3) \dots \dots \dots Z = sh,$$

und dieser Ausdruck lehrt, dass alle Zonen von der Höhe  $h$  mögen sie nahe bei  $P$  oder bei  $AB$  sein, immer von gleicher Grösse sind.

Summirt man alle Zonen, bis die Höhe  $h$  gleich  $PM$  geworden, so findet man die dreieckige Figur  $PAB$

$$4) \dots \dots \dots \Delta c = sr,$$

d. h. das cylindrisch gebogene Dreieck  $PAB$  ist doppelt so gross als das Grunddreieck  $MAB$ .

Die Inhaltszahlen dieser von einem Ellipsen- und einem Kreisbogen begrenzten Flächenstücke sind frei von  $\pi$ .

Macht man sowohl die inneren als auch die äusseren Trapeze zu Grundflächen von Pyramiden mit der Spitze  $M$ , so halbiren erstere alle die Höhe  $\rho$ , diese die Höhe  $r$ , und deshalb sind die Summen der Pyramiden:

$$\Sigma p = \frac{1}{2} \rho \cdot \frac{\rho}{r} sh \quad \text{und} \quad \Sigma P = \frac{1}{2} r \cdot sh,$$

welche, wenn man alle den Raum  $PBMA$  ausfüllenden Pyramiden addirt, beide für die zwischen ihnen liegende Grösse des Cylinderstücks  $PBMA$  liefern:



Aequator der Kugel concentrisch sind. Dann entsteht (Taf. I Fig. IV.) als Cylinder-Doppelpyramide ein geripptes Ellipsoi dessen Oberfläche das Vierfache des zackigen Aequatorialschnittes ist.

Macht man die Construction für sehr viele Punkte jener Ellipse und verlängert man jede Tangente über diese Ausgangspunkt bis zum Durchschnitt mit der nächsten, so entsteht ein zweifacher Stern, der mit seinen Spitzen über die Ellipse hervorraget. Je mehr Zacken diese Sterne haben, desto kleiner wird der Unterschied ihrer Inhalte; wächst die Anzahl der Spitzen bis ins Endliche, so nähern sich beide dem Inhalte der Ellipse und Volumina der zugehörigen gerippten Ellipsoide, von denen einer kleiner, das andere grösser ist als das Ellipsoid mit gleicher Oberfläche, haben das Volumen des Ellipsoids zur Grenze, dass sich für dieses, wenn die gegebene Kugel den Radius  $c$ , die um sie gelegte Ellipse den Inhalt  $\pi ab$  hat, ergibt:

$$2.2. \frac{1}{2} \pi ab \cdot c = \frac{4}{3} \pi abc.$$

---

## XXII.

### Ueber die Zerlegung einer ganzen rationalen Funktion in Faktoren.

Von

Herrn Professor *C. A. Bretschneider*

am Gymnasium zu Gotha.

---

Die im Archiv in diesem Theile S. 32. enthaltene Mittheilung des Herrn Franz Müller in Prag hat mir eine schon vor Jahrem gemachte Bemerkung in das Gedächtniss zurückgerufen, welche auf elementarem Wege erkennen lässt, ob eine ganze rationale Funktion

$$Fx = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n$$

suchen Faktor von der Form

$$\varphi(x^p) = c_0 (x^p)^m + c_1 (x^p)^{m-1} + \dots + c_{m-1} x^p + c_m$$

besitzt oder nicht. Bildet man nämlich die Hilfsfunktionen:

$$f_1 x = a_0 x^n + a_p x^{n-p} + a_{2p} x^{n-2p} + \dots$$

$$f_2 x = a_1 x^{n-1} + a_{p+1} x^{n-p-1} + a_{2p+1} x^{n-2p-1} + \dots$$

$$f_3 x = a_2 x^{n-2} + a_{p+2} x^{n-p-2} + a_{2p+2} x^{n-2p-2} + \dots$$

$$\dots \dots \dots$$

$$f_p x = a_{p-1} x^{n-p+1} + a_{2p-1} x^{n-2p+1} + a_{3p-1} x^{n-3p+1} + \dots$$

und sucht den grössten gemeinschaftlichen Theiler dieser  $p$  Funktionen, so ist letzterer der gesuchte Faktor  $\varphi(x^p)$ . Der Beweis dieser Behauptung ist höchst einfach. Setzt man

$$Fx = \varphi(x^p) \cdot \psi x,$$

wo  $\psi$  von der Form

$$\psi x = b_0 x^{n-pm} + b_1 x^{n-pm-1} + b_2 x^{n-pm-2} + \dots + b_{n-pm+1} x + b_{n-pm}$$

ist, und entwickelt das Product  $\varphi(x^p) \cdot \psi x$ , so erhält man jeden Coefficienten  $a$  ausgedrückt durch die Coefficienten  $b$  und  $c$ , und die Substitution dieser Werthe in die Ausdrücke für die Funktionen  $f x$  liefert sofort:

$$f_1 x = \varphi(x^p) \cdot \psi_1 x,$$

$$f_2 x = \varphi(x^p) \cdot \psi_2 x,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$f_p x = \varphi(x^p) \cdot \psi_p x;$$

in welchen Ausdrücken die  $\psi x$  ganze rationale Funktionen von der Form:

$$\psi_1 x = \alpha_1 x^{n-pm} + \beta_1 x$$

$$\psi_2 x = \alpha_2 x^{n-pm-1} + \beta_2$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\psi_p x = \alpha_p x^{n-(p-1)-pm}$$

und die Coefficienten  $\alpha$  beziehungsweise mit den  $b_p, b_{p+1}, \dots, b_{n-p-1}$  unendlich

$$\psi x = \psi_1 x + \psi_2 x + \psi_3 x + \dots + \psi_p x$$

sein muss. Ist also z. B. gegeben:

$$Fx = 3x^9 + 2x^8 - 10x^7 - 10x^6 + x^5 + 8x^4 - 2x^3 + 10x^2 - x + 2$$

und man will untersuchen, ob  $Fx$  einen Faktor von der Form  $c_0 + c_1 x^3 + c_2 x^4 + \dots$  besitzt, so bilde man die Hilfsfunktion

$$f_1 x = 3x^9 - 10x^7 + x^5 - 2x^3 - x,$$

$$f_2 x = 2x^8 - 10x^6 + 8x^4 + 10x^2 + 2,$$

und ermittle, ob sie einen gemeinschaftlichen Theiler besitzen. Die Division liefert für denselben den Werth  $(x^4 - 3x^2 - 1)$  dass man

$$Fx = (x^4 - 3x^2 - 1)(3x^5 + 2x^4 - x^3 - 4x^2 + x - 2)$$

erhält. Hätte man zu versuchen, ob die Funktion

$$Fx = 3x^{11} - 5x^{10} - 2x^9 - 8x^8 + 14x^7 - 12x^6 + 18x^4 + 24x^3 - 3x^2 + 3x$$

einen Faktor der Form  $c_0 + c_1 x^3 + c_2 x^6 + \dots$  besitze, so bilde man die drei Hilfsfunktionen:

$$f_1 x = 3x^{11} - 8x^8 - 12x^6 - 3x^2,$$

$$f_2 x = -5x^{10} + 14x^7 + 18x^4 + 3x,$$

$$f_3 x = -2x^9 + 0x^6 + 24x^3 + 18,$$

und ermittle, ob sie sämmtlich einen und denselben gemeinschaftlichen Faktor besitzen. Man findet den Werth  $(x^6 - 3x^3 - 3)$  als Faktor, der sowohl  $f_1 x$  und  $f_2 x$ , als auch  $f_1 x$  und  $f_3 x$  gemein ist, und erhält somit:

$$Fx = (x^6 - 3x^3 - 3)(3x^5 - 5x^4 - 2x^3 + x^2 - x - 6).$$

Ebenso würde sich für

$$Fx = 2x^9 - 4x^8 - 8x^7 + 15x^6 - 10x^5 + 22x^4 + 3x^3 + 24x^2 - 15x -$$

durch successive Zerlegung in zwei und sodann in drei Hilfsfunktionen der Werth

$$Fx = (x^2 - 5)(2x^3 - 3)(x^4 - 2x^3 + x^2 - x - 3)$$

ergeben.

Ist es auch mit Hülfe der höheren Algebra immer möglich zu ermitteln, ob eine Gleichung eine Wurzel von der Form besitzt, so dürfte doch das hier angegebene Verfahren bei so ganz elementaren Natur immerhin nicht ohne Werth und weitens beim Unterrichte in den Elementen der Algebra recht brauchbar sein.





da nun auch

$$F_{n-2} = \frac{t_1^2 - a_1^2}{a_1} + \frac{c^2 \cdot t_1}{a_1} \cdot \sqrt{n-2}$$

ist, so ergibt sich:

$$F_n = \frac{t_1^2 - a_1^2 - c^2}{a_1} - \frac{c^2}{F_{n-2}},$$

oder, wenn man das Zeichen  $M = \frac{t_1^2 - a_1^2 - c^2}{a_1}$  einführt:

$$F_n = M - \frac{c^2}{F_{n-2}} \dots \dots \dots (4)$$

Durch wiederholte Anwendung der Gleichung (4) erhält man:

$$F_n = M - \frac{c^2}{M - \frac{c^2}{M - \dots \dots \dots - \frac{c^2}{F_{n-2m}}}},$$

oder es lässt sich  $F_n$  als Kettenbruch darstellen, dessen einzelne Glieder subtractiv sonst aber  $= \frac{c^2}{M}$  sind, dessen Endglied  $\frac{c^2}{F_2}$  oder  $\frac{c^2}{F_3}$  ist, je nachdem  $n$  eine ungerade oder gerade Zahl

## §. 2.

Versucht man  $F_n$  als Quotienten darzustellen, setzt  $F_n = \frac{Z_n}{N_n}$  (wobei also  $Z_n, N_n$  eine andere Bedeutung haben als bisher), ist wegen Gleichung (4):

$$F_n = \frac{(t_1^2 - a_1^2 - c^2) \cdot Z_{n-2} - a_1 \cdot c^2 \cdot N_{n-2}}{a_1 \cdot Z_{n-2}},$$

d. h. man findet:

$$N_n = a_1 \cdot Z_{n-2}; \quad Z_n = (t_1^2 - a_1^2 - c^2) \cdot Z_{n-2} - a_1 \cdot c^2 \cdot N_{n-2} \quad (5)$$

Soll also  $F_n$  als Quotient gefunden werden, so braucht man den Dividendus desselben zu suchen, der Divisor ist gleich dem Produkte aus  $a_1$  in den zu  $F_{n-2}$  gehörigen Dividendus. Aus 6 Gleichungen in (1) ergeben sich die folgenden Gleichungen:

$$Z_2 = t_1^2 - a_1^2 + t_1 c,$$

$$Z_4 = -t_1^4 + t_1^2(2a_1^2 + c^2) - a_1^4 + t_1 c \cdot [-t_1^2 + (a_1^2 + c^2)],$$

$$Z_6 = -t_1^6 + t_1^4(3a_1^2 + 2c^2) - t_1^2(3a_1^4 + 2a_1^2 c^2 + c^4) + a_1^6 + t_1 c \cdot [-t_1^4 + t_1^2(2a_1^2 + 2c^2) - (a_1^4 + a_1^2 c^2 + c^4)]$$



Setzt man in (A) ein  $p = q = n - m + 1$ , so ergibt sich:

$$\sum_0^m [(n - m + s)_s \cdot (n - s)_{m-s}] = (2n - m + 1)_m. \quad (C)$$

Aus (A) folgt:

$$\sum_0^{m-1} [(p + s - 1)_s \cdot (q + m - s - 2)_{m-s-1}] = (p + q + m - 2)_{m-1}$$

oder

$$\sum_1^m [(p + s - 2)_{s-1} \cdot (q + m - s - 1)_{m-s}] = (p + q + m - 2)_{m-1},$$

und macht man hierin  $p = q = n - m + 1$ , so folgt:

$$\sum_1^m [(n - m + s - 1)_{s-1} \cdot (n - s)_{m-s}] = (2n - m)_{m-1}. \quad (D)$$

Wegen der Gleichungen (B), (C), (D) gehen die Gleichungen (7) und (8) in dem Falle, wo  $a_1 = c$  ist, über in:

(11)

$$\begin{aligned} Z_{2n} = & \sum_0^n [(-1)^{m+1} \cdot (2n - m)_m \cdot t_1^{2n-2m} \cdot a_1^{2m}] \\ & + \sum_1^n [(-1)^m \cdot (2n - m)_{m-1} \cdot t_1^{2n-2m+1} \cdot a_1^{2m-1}], \end{aligned}$$

(12)

$$\begin{aligned} Z_{2n+1} = & \sum_0^n [(-1)^{m+1} \cdot (2n - m + 1)_m \cdot t_1^{2n-2m+1} \cdot a_1^{2m}] \\ & + \sum_0^n [(-1)^m \cdot (2n - m)_m \cdot t_1^{2n-2m} \cdot a_1^{2m+1}]. \end{aligned}$$

Sind  $p, q$  absolute ganze Zahlen,  $q > p$ , so ist:

$$\begin{aligned} (1-x)^p &= \sum_0^p [(-1)^s \cdot p_s \cdot x^s]; & (1-x)^{-q} &= \sum_0^\infty [(q + s - 1)_s \cdot x^s]; \\ (1-x)^{-(q-p)} &= \sum_0^\infty [(q - p + m - 1)_m \cdot x^m], \end{aligned}$$

folglich:

$$\sum_0^m [(-1)^s \cdot p_s \cdot (q + m - s - 1)_{m-s}] = (q - p + m - 1)_m. \quad (E)$$

Für  $p = m - 1, q = n - m + 1$  geht (E) über in:

$$\sum_0^m [(-1)^s \cdot (m - 1)_s \cdot (n - s)_{m-s}] = (n - m + 1)_m. \quad (F)$$



## §. 3.

Im Dreiecke  $ABC$ , dessen Seite  $AB$  mit  $c$  bezeichnet wird, ziehe man durch  $A$  eine beliebige Transversale  $AC_1$ , lege an  $C_1$  in  $A$  den Winkel  $ABC = C_1AC_2$  an, so dass  $C_1AC_2$  und  $A$  auf derselben Seite von  $AC_1$  liegen, an  $AC_2$  lege man wieder denselben Winkel  $= C_2AC_3$  an, an  $AC_3$  wieder und so mache also  $ABC = C_1AC_2 = C_2AC_3 = C_3AC_4 = C_4AC_5 = \dots$ , bezeichne die Strecken der Transversalen von  $A$  bis zum Schnittpunkte in  $BC$  mit  $t$  und dem zugehörigen Zeiger, setze  $AC_1 = t_1, AC_2 = t_2, AC_3 = t_3, AC_4 = t_4 = \dots$ , bezeichne ferner  $BC_1$  mit  $a_1, BC_2$  mit  $a_2, BC_3$  mit  $a_3, \dots$ , so ist:

$$\Delta C_1AC_2 \sim \Delta C_1AB, \Delta C_2AC_3 \sim \Delta C_2AB, \Delta C_3AC_4 \sim \Delta C_3AB, \dots$$

folglich:

$$\frac{t_1}{a_1} = \frac{t_2}{c} = \frac{a_1 - a_2}{t_1}; \quad \frac{t_2}{a_2} = \frac{t_3}{c} = \frac{a_2 - a_3}{t_2}; \quad \frac{t_3}{a_3} = \frac{t_4}{c} = \frac{a_3 - a_4}{t_3} \quad \text{u. s.}$$

oder es ist:

$$t_2 = \frac{c \cdot t_1}{a_1}, \quad t_3 = \frac{c \cdot t_2}{a_2}, \quad t_4 = \frac{c \cdot t_3}{a_3}, \dots$$

$$a_2 = \frac{a_1^2 - t_1^2}{a_1}, \quad a_3 = \frac{a_2^2 - t_2^2}{a_2}, \quad a_4 = \frac{a_3^2 - t_3^2}{a_3}, \dots$$

Dass die entsprechenden Gleichungen für  $t_5, a_5, t_6, a_6, \dots$  gelten, wenn  $AC_5, AC_6, \dots$  innerhalb des Winkels  $CAB$  liegen, bedarf keines Beweises; es fragt sich, in wie fern die Gleichungen noch gelten, wenn die Transversalen ausserhalb des Winkels liegen. Nach der Figur ist  $AC_6$  die erste ausserhalb liegende.

















$$26\text{-Eck: } x^6 + x^5r - 5x^4r^2 - 4x^3r^3 + 6x^2r^4 + 3xr^5 - r^6 = 0,$$

$$30\text{-Eck: } x^7 - x^6r - 6x^5r^2 + 5x^4r^3 + 10x^3r^4 - 6x^2r^5 - 4xr^6 + r^7 = 0,$$

$$34\text{-Eck: } x^8 + x^7r - 7x^6r^2 - 6x^5r^3 + 15x^4r^4 \\ + 10x^3r^5 - 10x^2r^6 - 4xr^7 + r^8 = 0,$$

$$38\text{-Eck: } x^9 - x^8r - 8x^7r^2 + 7x^6r^3 + 21x^5r^4 - 15x^4r^5 \\ - 20x^3r^6 + 10x^2r^7 + 5xr^8 - r^9 = 0,$$

$$42\text{-Eck: } x^{10} + x^9r - 9x^8r^2 - 8x^7r^3 + 28x^6r^4 \\ + 21x^5r^5 - 35x^4r^6 - 20x^3r^7 + 15x^2r^8 + 5xr^9 - r^{10} = 0,$$

u. s. w.

## §. 8.

Die Frage, in welchen Fällen für einzelne Diagonalen eines regulären  $2(2n+1)$ -Ecks einfachere Gleichungen gelten als die in §. 7. gefundenen, tritt in dem Falle auf, wo  $2n+1$  keine Primzahl ist. Ist  $2n+1 = m.s$ , wo  $m$  wie  $s$  ungerade Zahlen sind, die zunächst keinen gemeinsamen Factor haben mögen, so werden sich sämtliche Diagonalen des  $2m$ - wie des  $2s$ -Ecks als Diagonalen des  $2(2n+1)$ -Ecks, also auch die ungeraden Diagonalen der ersten Vielecke als ungerade Diagonalen des  $2(2n+1)$ -Ecks finden. In dem Falle nun, dass  $m, s$  beides Zahlen von der Form  $4\mu+1$  sind, ist die  $s$ te Diagonale des  $2(2n+1)$ -Ecks die Seite, also erste Diagonale des  $2m$ -Ecks; ebenso ist jede  $(4\nu \pm 1)$ .ste Diagonale des  $2(2n+1)$ -Ecks die  $(4\nu \pm 1)$ te Diagonale des  $2m$ -Ecks. Beachtet man, dass die Gleichung (21) alle ungeraden Diagonalen des betreffenden Vielecks als Wurzeln enthält, sonst keine andern, so ergibt sich aus den vorstehenden Betrachtungen und ähnlichen für den Fall, dass entweder  $m$  oder  $s$  oder beide von der Form  $4\mu+3$  sind, folgender Satz, zu dessen Verständniss noch zu beachten ist, dass unter umgewandelter Gleichung eines Vielecks die Gleichung verstanden wird, die man aus der Gleichung des Vielecks dadurch erhält, dass man darin  $-x$  statt  $x$  setzt:

Ist  $2n+1 = m.s$  (es haben  $m, s$  keinen Factor gemein) und es sind  $m$  und  $s$  beide von der Form  $4\mu+1$ , so enthält die Gleichung des regulären  $2(2n+1)$ -Ecks (21) als Factor sowohl die Gleichung des  $2m$ -, wie des  $2s$ -Ecks; sind  $m$  und  $s$  beide von der Form  $4\mu+3$ , so enthält die Gleichung des  $2(2n+1)$ -Ecks die umgewandelte Gleichung des  $2m$ -, wie des  $2s$ -Ecks als Factor; in





$$4m + \frac{4p}{n} = \frac{s(n-2p)}{n} \dots \dots \dots (A)$$

Ist nun  $n$  zunächst eine ungerade Zahl, so ist (A) nur lösbar, wenn  $s$  durch 4 theilbar ist. Man setze also  $s=4\sigma$  und erhält:

$$p(2\sigma + 1) = (\sigma - m) \cdot n, \dots \dots \dots (B)$$

Die Gleichung, die jedenfalls erfüllt ist, wenn man  $\sigma = \frac{1}{2}(n-1)$ ,  $= \sigma - m$  setzt; somit kann  $p$  jede ganze Zahl  $=$  oder  $< \sigma$  sein. Die Gleichung  $Z_{4\sigma} = 0$  (18) wäre also Gleichung für die Seiten und Diagonalen des regulären  $(2\sigma + 1)$ -Ecks; da die grösste Diagonale eines solchen Vielecks  $x_\sigma$  ist, so enthält  $Z_{4\sigma} = 0$  unter seinen Wurzeln alle Diagonalen des regulären  $(2\sigma + 1)$ -Ecks. Haben  $p$  und  $n$  einen gemeinsamen Factor, so wird sich für gewisse Werthe von  $p$  (aber der Werth  $p=1$  gehört nicht dazu) vielleicht ein kleinerer Werth von  $s$  finden lassen, der der Gleichung (A) genügt. Somit erhält man den Satz:

Sucht man die Wurzeln der Gleichung:

$$Z_{4n} = \sqrt{2n+1} \\ = \sum_0^n \{ (-1)^m [(2n-m+1)_m + (2n-m)_{m-1}] \cdot x^{2n-2m} \cdot r^{2m} \} = 0,$$

so finden sich unter denselben die Werthe aller Diagonalen, also auch der Seite des regulären  $(2n+1)$ -Ecks.

Gleichungen der regulären  $(2n+1)$ -Ecke; Radius = 1.

$$\text{Eck: } x^2 - 3 = 0,$$

$$\text{Eck: } x^4 - 5x^2 + 5 = 0,$$

$$\text{Eck: } x^6 - 7x^4 + 14x^2 - 7 = 0,$$

$$\text{Eck: } x^8 - 9x^6 + 27x^4 - 30x^2 + 9 = 0,$$

$$\text{Eck: } x^{10} - 11x^8 + 44x^6 - 77x^4 + 55x^2 - 11 = 0,$$

$$\text{Eck: } x^{12} - 13x^{10} + 65x^8 - 156x^6 + 182x^4 - 91x^2 + 13 = 0,$$

$$\text{Eck: } x^{14} - 15x^{12} + 90x^{10} - 275x^8 + 450x^6 - 378x^4 + 140x^2 - 15 = 0,$$

$$\text{Eck: } x^{16} - 17x^{14} + 119x^{12} - 442x^{10} + 935x^8 - 1122x^6 + 714x^4 - 204x^2 + 17 = 0,$$

u. s. w.

$n$  in der obigen Gleichung (A) eine gerade Zahl, etwa  $= 2\nu$ , geht (A) über in:

$$4m + \frac{2p}{\nu} = \frac{s(\nu - p)}{\nu}, \dots \dots \dots (C)$$



d. h. entweder ist  $s$  gerade oder  $v$  und  $p$  sind ungerade. Bei der letztern Annahme gelangt man zu den Gleichungen in (21), bei der erstern, wo  $s=2\sigma$  gesetzt wird, ist  $p(\sigma+1)=v(\sigma-2m)$ , und diese Gleichung ist erfüllt, wenn man  $v=\sigma+1$ ,  $p=\sigma-2m$  nimmt, d. h. man erhält den Satz:

Sucht man die Wurzeln der Gleichung

$$Z_{2(2n-1)} = \sqrt{4n} \\ = \sum_0^n (-1)^m [(2n-m)_m + (2n-m-1)_{m-1}] \cdot x^{2n-2m} \cdot r^{2m} = 0,$$

so befinden sich darunter, die Werthe aller ungeraden Diagonalen des regulären  $4n$ -Ecks.

Gleichungen der regulären  $4n$ -Ecke; Radius = 1.

$$4\text{-Eck: } x^2 - 2 = 0,$$

$$8\text{-Eck: } x^4 - 4x^2 + 2 = 0,$$

$$12\text{-Eck: } x^6 - 6x^4 + 9x^2 - 2 = 0,$$

$$16\text{-Eck: } x^8 - 8x^6 + 20x^4 - 16x^2 + 2 = 0,$$

$$20\text{-Eck: } x^{10} - 10x^8 + 35x^6 - 50x^4 + 20x^2 - 2 = 0,$$

u. s. w.

Aus den Gleichungen in §. 7. und §. 9. lassen sich leicht Gleichungen finden, die zwischen bestimmten Diagonalen eines regulären Vielecks gelten, denn im regulären  $2n$ -Ecke ist das Dreieck, dessen Basis  $x_p$ , dessen gleiche Seiten Radien sind, ähnlich einem Dreiecke, dessen Basis  $x_{2p}$ , dessen gleiche Seiten  $x_{n-p}$  sind.

Im Folgenden beschäftigen wir uns nur mit den regulären  $2(2n+1)$ -Ecken; sind die Diagonalen eines solchen Vielecks gefunden, so sind auch die Diagonalen des  $(2n+1)$ -,  $4(2n+1)$ -,  $8(2n+1)$ -, .... Ecks bestimmt.

### §. 10.

Zu den Gleichungen in (21) kann man noch auf eine andere Weise gelangen. Setzt man in der Gleichung

$$x^{2n} + x^{2n-1} + x^{2n-2} + \dots + x^2 + x + 1 = 0,$$

d. h. in

$$\frac{x^{2n+1} - 1}{x - 1} = 0$$

den Werth  $x + \frac{1}{x} = y$  ein, so ergibt sich:

$$y^n - (n-1)_1 \cdot y^{n-2} + (n-2)_2 \cdot y^{n-4} - (n-3)_3 \cdot y^{n-6} + (n-4)_4 \cdot y^{n-8} - \dots] \\ + [y^{n-1} - (n-2)_1 \cdot y^{n-3} + (n-3)_2 \cdot y^{n-5} - (n-4)_3 \cdot y^{n-7} + \dots] = 0.$$

Der allgemeine Beweis für diese Umformung ist gewiss schon anderweit geführt, wenngleich dem Verfasser nur der Beweis für die ersten Glieder aus Eytelwein: „Anweisung zur Auflösung der höhern num. Gleichungen pp. 22. 23. bekannt ist; übrigens hat der allgemeine Beweis keine Schwierigkeit. Die umgeformte Gleichung lässt sich aber auch

$$\sum_0^n [(-1)^m \cdot (n-m)_m \cdot y^{n-2m}] + \frac{1}{2} \sum_0^{n-1} [(-1)^m \cdot (n-m-1)_m \cdot y^{n-2m-1}] = 0$$

schreiben; setzt man hierin  $2n$  an die Stelle von  $n$ , so ergibt sich:

$$\sum_0^n [(-1)^m \cdot (2n-m)_m \cdot y^{2n-2m}] + \sum_0^{n-1} [(-1)^m \cdot (2n-m-1)_m \cdot y^{2n-2m-1}] = 0$$

oder:

(22)

$$\sum_0^n [(-1)^m \cdot (2n-m)_m \cdot y^{2n-2m}] - \sum_1^n [(-1)^m \cdot (2n-m)_{m-1} \cdot y^{2n-2m+1}] = 0,$$

h. die erste Gleichung in (21), wenn man darin  $r=1$  setzt.

Ehenso geht die Gleichung

$$x^{2n} - x^{2n-1} + x^{2n-2} - x^{2n-3} + \dots + x^2 - x + 1 = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{x^{2n+1} + 1}{x + 1} = 0$$

über in:

$$\sum_0^n [(-1)^m \cdot (n-m)_m \cdot y^{n-2m}] - \frac{1}{2} \sum_0^{n-1} [(-1)^m \cdot (n-m-1)_m \cdot y^{n-2m-1}] = 0,$$

und setzt man hierin  $2n+1$  statt  $n$ , so erhält man:

(23)

$$\sum_0^n [(-1)^m \cdot (2n+1-m)_m \cdot y^{2n+1-2m}] - \sum_0^n [(-1)^m \cdot (2n-m)_m \cdot y^{2n-2m}] = 0,$$

h. es ergibt sich die zweite Gleichung in (21), wenn man darin  $r=1$  setzt.

Wird also der Radius des Kreises  $=1$  gesetzt, so erhält man die Gleichung des regulären  $2(4n+1)$ -Ecks aus der Gleichung  $\frac{x^{4n+1} - 1}{x - 1} = 0$ , die Gleichung des regu-

$2(4n+3)$ -Ecks aus der Gleichung  $\frac{x^{4n+3}+1}{x+1}=0$ , wenn man in denselben  $x+\frac{1}{x}=y$  setzt; d. h. ein beliebigen stets imaginärer Wurzelwerth dieser Gleichung plus dem umgekehrten Werthe dieses Wurzelwerthes giebt die Grösse einer ungeraden Diagonale des regulären  $2(4n+1)$  resp.  $2(4n+3)$ -Ecks, entweder mit dem Vorzeichen  $+$  oder  $-$  versehen.

## §. 11.

Die Gleichung

$$x^{4n} + x^{4n-1} + x^{4n-2} + x^{4n-3} + \dots + x^2 + x + 1 = 0$$

bleibt unverändert, wenn man darin  $x = \sqrt{z}$  einsetzt, d. h. die neue Gleichung hat dieselben Wurzeln als die gegebene. Ist also  $\alpha$  irgend eine Wurzel der Gleichung, so ist auch  $\alpha^2$  eine Wurzel derselben. Nimmt man nun  $\alpha + \frac{1}{\alpha} = y_1$ ,  $\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2} = y_2$  [ $y_1, y_2$  sind alsdann Wurzeln der Gleichung (22)], so folgt aus beiden Gleichungen  $y_1^2 = 2 + y_2$ , d. h. es sind die Wurzeln der Gleichung (22) von der Beschaffenheit, dass das Quadrat jeder Wurzel gleich ist 2 plus einer andern Wurzel, die Wurzel natürlich versehen mit dem zugehörigen Vorzeichen.

Wird in der Gleichung

$$x^{4n+2} - x^{4n+1} + x^{4n} - x^{4n-1} + \dots + x^2 - x + 1 = 0$$

$\sqrt{z}$  an die Stelle von  $x$  gesetzt, so erhält man eine Gleichung, deren Wurzeln man aus den Wurzeln der gegebenen erhält, wenn man letztere mit  $-1$  multiplicirt; ist also  $\alpha$  eine Wurzel der Gleichung, so ist auch  $-\alpha^2$  eine Wurzel derselben. Setzt man nun in dieser Gleichung  $\alpha + \frac{1}{\alpha} = y_1$ ;  $-\alpha^2 - \frac{1}{\alpha^2} = y_2$  [ $y_1, y_2$  sind alsdann Wurzeln der Gleichung (23)], so folgt aus beiden Gleichungen  $y_1^2 = 2 - y_2$ , d. h. die Wurzeln der Gleichung (23) sind von der Beschaffenheit, dass das Quadrat jeder Wurzel gleich ist 2 minus einer andern Wurzel derselben Gleichung.

Beachtet man, dass die Wurzeln der Gleichung (22) die ungeraden Diagonalen des regulären  $2(4n+1)$ -Ecks, die der Gleichung (23) die ungeraden Diagonalen des  $2(4n+3)$ -Ecks sind, theils versehen mit dem Vorzeichen  $+$ , theils mit dem Vorzeichen  $-$ , so ergibt sich folgender Satz:















$$x^n + A_1 \cdot x^{n-1} + A_2 \cdot x^{n-2} + \dots + A_{n-1} \cdot x + A_n = 0, \quad (24)$$

enthalte als Wurzeln die Grössen  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ ; man wisse, dass zwischen diesen Grössen die Gleichungen gelten:

(25)

$$x_1^2 = 2 + x_2; x_2^2 = 2 + x_3; x_3^2 = 2 + x_4; \dots x_{n-1}^2 = 2 + x_n; x_n^2 = 2 + x_1.$$

Aus (25) folgt  $x_1^2 - 2 = x_2$ , folglich:

$$x_1^4 - 4x_1^2 = x_2^2 - 4; x_2^4 - 4x_2^2 = x_3^2 - 4; x_3^4 - 4x_3^2 = x_4^2 - 4; \dots$$

$$x_n^4 - 4x_n^2 = x_1^2 - 4,$$

folglich:

(26)

$$x_1^2 \cdot x_2^2 \cdot x_3^2 \dots x_{n-1}^2, x_n^2 = 1 \text{ oder } x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \dots x_{n-1} \cdot x_n = \pm 1 = A_n.$$

Das Produkt derjenigen ungeraden Diagonalen eines regulären  $2(4n+1)$ -Ecks, die eine Periode bilden, ist  $= +1$ , wenn alle Diagonalen nach ihrem absoluten Werthe genommen werden.

Da man aus den Zeigern der Diagonalen sehen kann, welche positiv, welche als negativ erscheinen, so lässt sich stets sagen, ob das Produkt der Diagonalen, die eine Periode bilden,  $= +1$  oder  $= -1$  sei.

Die Gleichungen in (25) lassen sich auch schreiben:

$$x_1^2 - 1 = 1 + x_2; x_2^2 - 1 = 1 + x_3; \dots x_n^2 - 1 = 1 + x_1;$$

folglich ist:

$$(x_1 - 1)(x_2 - 1)(x_3 - 1) \dots (x_n - 1) = 1. \dots (27)$$

Versteht man unter  $C_1, C_2, C_3, \dots, C_n$  die Summe der ersten, zweiten, dritten, ....  $n$ ten Combinationsklasse ohne Wiederholungen aus den Elementen  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ , so kann man statt (27) auch

$$1 - C_1 + C_2 - C_3 + \dots + (-1)^n \cdot C_n = 1$$

setzen, und da nach bekannten Sätzen:

$$A_1 = -C_1, A_2 = +C_2, A_3 = -C_3, \dots A_n = (-1)^n \cdot C_n, \dots$$

so geht die letzte Gleichung, im Falle  $n$  eine gerade Zahl ist, über in:

$$A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n = 0, \dots (28)$$

wenn  $n$  eine ungerade Zahl ist in:



$$A_2 = \frac{A_1^2 - A_1 - 2n}{2}; \quad S_2 = 2n - S_1; \quad S_4 = 4n - 4S_1 + S_2;$$

u. s. w.

sind werde.

### §. 16.

Die Gleichungen von §. 15. genügen, um die Gleichung des regulären 34-Ecks in zwei Gleichungen vierten Grades zu zerlegen. — Aus §. 13. und §. 14. weiss man, dass die ungeraden Diagonalen des regulären 34-Ecks zwei Perioden zu 4 Gliedern bilden. Es sei

$$x^4 + A_1 x^3 + A_2 x^2 + A_3 x + A_4 = 0$$

die Gleichung, welche die Diagonalen 1. 15. 13. 9 als Wurzeln enthält; da nur die Diagonale 15 negativ ist, so ist  $A_4$  nach (26)  $= -1$ ; die Gleichungen (28), (30), (32) geben also jetzt:

$$1 + A_2 + A_3 = +1; \quad 8 - 4A_1 + 2A_2 - A_3 = 1; \quad A_2 = \frac{A_1^2 + A_1 - 8}{2}.$$

Aus den ersten beiden Gleichungen folgt:

$$1_2 = A_1 - 2, \text{ folglich } A_1 - 2 = \frac{A_1^2 + A_1 - 8}{2} \text{ oder } A_1^2 - A_1 - 4 = 0,$$

h.:

$$A_1 = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{17});$$

Da nun  $x_1 + x_{13} + x_9 > x_{15}$  ist, so ist  $A_1$  negativ, folglich:

$$1_1 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{17}); \quad A_2 = \frac{1}{2}(-3 - \sqrt{17}); \quad A_3 = 2 + \sqrt{17}; \quad A_4 = -1.$$

Man hätte genau dieselben drei Bedingungsgleichungen erhalten, hätte die obige Gleichung als Wurzeln enthalten sollen die Diagonalen 3. 11. 5. 7; da hier drei negative Wurzeln vorhanden sind und  $x_3 + x_{11} + x_7$  dem absoluten Werthe nach grösser ist als  $x_9$ , so ist jetzt für  $A_1$  der positive Werth zu nehmen; man erhielte für diesen Fall:

$$1_1 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{17}); \quad A_2 = \frac{1}{2}(-3 + \sqrt{17}); \quad A_3 = 2 - \sqrt{17}; \quad A_4 = -1;$$

oder

die Gleichung:

$$x^4 + \frac{1}{2}(1 - \sqrt{17})x^3 - \frac{1}{2}(3 + \sqrt{17})x^2 + (2 + \sqrt{17})x - 1 = 0$$

hat zu Wurzeln die Diagonalen 1. 9. 13. 15,

die Gleichung:

$$x^4 + \frac{1}{2}(1 + \sqrt{17})x^3 - \frac{1}{2}(3 - \sqrt{17})x^2 + (2 - \sqrt{17})x - 1 = 0$$

hat zu Wurzeln die Diagonalen 3. 5. 7. 11 des regulären 34-Ecks.

(34)













$$x^3 + x_{m+1}^3 + \dots + x_{(\pi-1)m+1}^3 = \pi \cdot x_1 + 3(x_1 + x_{m+1} + \dots + x_{(\pi-1)m+1}).$$

Soll die Hauptperiode in  $\pi$  Gleichungen zerlegt werden, wo mithin eine Gleichung die Diagonalen  $x_1, x_{\pi+1}, x_{2\pi+1}, \dots, x_{(\pi-1)\pi+1}$  als Wurzeln enthalten wird, so wird sich auch eine in jedem bestimmten Falle leicht zu ermittelnde Reihe Diagonalen aus der  $\pi$ -ten Periode ergeben, deren Summe vermehrt um die dreifache Summe der genannten Diagonalen gleich ist der Summe der dritten Potenzen dieser letztern Diagonalen.

Man kann diesen Fall übrigens ganz auf den Fall in §. 19. zurückführen, wenn man die zweite Periode, die nur  $m$  Glieder hat,  $\pi$ mal hinter einander schreibt und die so erhaltene Reihe als Periode betrachtet, die mit der Hauptperiode gleiche Gliederzahl hat.

## §. 22.

Als Beispiel, wie man die bisher erwähnten Sätze zur Zerlegung der Gleichung eines regulären  $2(2n+1)$ -Ecks benutzen könne, diene die Zerlegung der Gleichung des regulären 82-Ecks in zwei Gleichungen. Die gesuchten Gleichungen seien:

$$x^{10} + A_1 \cdot x^9 + A_2 \cdot x^8 + \dots + A_9 \cdot x + A_{10} = 0$$

mit den Diagonalen 1. 39. 37. 33. 25. 9. 23. 5. 31. 21 und

$$x^{10} + B_1 \cdot x^9 + B_2 \cdot x^8 + \dots + B_9 \cdot x + B_{10} = 0$$

mit den Diagonalen 3. 35. 29. 17. 7. 27. 13. 15. 11. 19 als Wurzeln.

Es sei gefunden:

$$A_1 = -S_1 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{41}) \quad \text{und} \quad B_1 = -S_1 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{41}),$$

und habe  $S_1, S_2, S_3, \dots$  dieselbe Bedeutung [Gleichung (31)] für die erste, wie  $S_1, S_2, S_3, \dots$  für die zweite Gleichung. — Nach Gleichung (32) ist:

$$S_2 = \frac{1}{2}(39 + \sqrt{41}), \quad S_2 = \frac{1}{2}(39 - \sqrt{41});$$

nach Gleichung (38) ist:

$$S_3 = -2 + \sqrt{41}, \quad S_3 = -2 - \sqrt{41};$$

nach Gleichung (33):

$$S_4 = \frac{1}{2}(115 + 5\sqrt{41}), \quad S_4 = \frac{1}{2}(115 - 5\sqrt{41});$$

nach Gleichung (39):

$$S_5 = -8 + 3\sqrt{41}, \quad S_5 = -8 - 3\sqrt{41};$$

nach Gleichung (33):

$$S_6 = 189 + 10\sqrt{41}, \quad S_6 = 189 - 10\sqrt{41};$$

nach Gleichung (40):

$$S_7 = -32 + 10\sqrt{41}, \quad S_7 = -32 - 10\sqrt{41};$$

nach Gleichung (33):

$$S_8 = \frac{1}{4}(1307 + 77\sqrt{41}), \quad S_8 = \frac{1}{4}(1307 - 77\sqrt{41}).$$

Mittelst der Newton'schen Gleichungen und der Gleichungen und (28) findet man nun:

$$\begin{aligned} A_2 &= \frac{1}{4}(-9 - \sqrt{41}), & B_2 &= \frac{1}{4}(-9 + \sqrt{41}); \\ A_3 &= \frac{1}{4}(7 + 7\sqrt{41}), & B_3 &= \frac{1}{4}(7 - 7\sqrt{41}); \\ A_4 &= -2 + 2\sqrt{41}, & B_4 &= -2 - 2\sqrt{41}; \\ A_5 &= -28 - 8\sqrt{41}, & B_5 &= -28 + 8\sqrt{41}; \\ A_6 &= 33, & B_6 &= 33; \\ A_7 &= \frac{1}{4}(71 + 11\sqrt{41}), & B_7 &= \frac{1}{4}(71 - 11\sqrt{41}); \\ A_8 &= -42 - 4\sqrt{41}, & B_8 &= -42 + 4\sqrt{41}; \\ A_9 &= 5 + 2\sqrt{41}, & B_9 &= 5 - 2\sqrt{41}; \\ A_{10} &= -1, & B_{10} &= -1. \end{aligned}$$

Man sieht, dass man die wirkliche Gleichung des regulären 82-Ecks nicht zu kennen braucht, um die Zerlegung zu bewirken, dass sich  $A_1, B_1$  finden lassen, wenn man von der Gleichung des 82-Ecks nur die ersten Glieder  $x^{20} + x^{19} - 19x^{18} - \dots$  kennt, werden wir §. 24. sehen.

### §. 23.

Zieht man in irgend einem regulären Vielecke alle Seiten und Diagonalen, so lassen sich irgend zwei Diagonalen desselben als Gegenseiten (oder Diagonalen) eines Sehnenvierecks auffassen und darauf der Ptolemäische Lehrsatz anwenden. — Sind  $x_m, x_p$  (wofür man auch  $m, p$  setzen kann) zwei ungerade Diagonalen eines regulären  $2(2n+1)$ -Ecks, so giebt es unter den verschiedenen Sehnenvierecken, in denen  $x_m, x_p$  Gegenseiten sein können, zwei, die zugleich Parallel-Trapeze sind. In dem einen liegen  $x_m, x_p$  auf verschiedenen, in dem andern auf derselben Seite des Mittelpunktes. Im letzteren sind, wenn  $m > p$  ist, beiden andern Gegenseiten  $= x_{\frac{1}{2}(m-p)}$ ; die beiden Diagonalen  $= x_{\frac{1}{2}(m+p)}$ , nach dem Ptolemäer also:

$$x_m \cdot x_p = x_{\frac{1}{2}(m+p)}^2 - x_{\frac{1}{2}(m-p)}^2,$$





Man überzeugt sich bald, dass jedes Glied der ersten Periode sich viermal in der Reihe findet, jedes Glied der zweiten Periode aber fünfmal; setzt man also statt des Quadrates jedes Gliedes 2 plus dem folgenden Gliede der Periode, so ist:

$$A_2 = -4A_1 - 5B_1 = -4 - B_1, \text{ da } A_1 + B_1 = 1 \text{ ist,}$$

folglich:

$$\frac{1}{2}(A_1^2 + A_1 - 20) = -4 - B_1 \text{ oder } A_1^2 + B_1 = 11;$$

ebenso:

$$B_1^2 + A_1 = 11,$$

folglich:

$$A_1 \cdot B_1 = -10 \text{ und } A_1 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{41}), \quad B_1 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{41}),$$

da man aus den Zeigern der Diagonalen abnehmen kann, dass  $A_1$ , welches nur die drei negativen Diagonalen  $x_{23}$ ,  $x_{31}$ ,  $x_{39}$  enthält, negativ,  $B_1$  aber positiv sein muss.

Statt  $A_2$ ,  $B_2$  zu suchen, konnte man auch direkt  $A_1 \cdot B_1$  auf gleiche Weise finden.

## §. 25.

### Beispiele der Zerlegung.

#### I. Die Gleichung des 26-Ecks:

$$x^6 + x^5 - 5x^4 - 4x^3 + 6x^2 + 3x - 1 = 0 \text{ (Periode 1. 11. 9. 5. 3. 7.)}$$

soll in zwei Gleichungen

$$x^3 + A_1 \cdot x^2 + A_2 \cdot x + A_3 = 0 \text{ (Wurzeln 1. 9. 3.)}$$

und

$$x^3 + B_1 \cdot x^2 + B_2 \cdot x + B_3 = 0 \text{ (Wurzeln 11. 5. 7.)}$$

zerlegt werden. Um  $A_2$  zu finden, bildet man die Reihe  $\begin{matrix} 5. & 11. & 7 \\ 9. & 1. & 3 \end{matrix}$  also ist  $A_2 = -1 = B_2$ . Da  $A_2 = \frac{1}{2}(A_1^2 + B_1 - 6)$  (§. 16.), so ergibt sich:  $A_1^2 + B_1 = 4$ , desgleichen  $B_1^2 + A_1 = 4$ , folglich:  $A_1^2 + B_1^2 = 7$  und  $A_1 \cdot B_1 = -3$ ,  $A_1 - B_1 = \pm \sqrt{13}$ . Da  $A_1$  negativ ist ( $x_1 + x_9 + x_3$  ist positiv), so folgt:

$$A_1 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{13}), \quad B_1 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{13}).$$

Will man  $A_3$  nach §. 23. berechnen, so ergibt sich:

$$A_3 = -x_1 \cdot x_9 \cdot x_3 = -x_3(x_3 + x_5) = -(x_3^2 + x_9^2 + x_1^2 - 4) \\ = -(2 + x_7 + x_5 + x_{11}) = -(2 - B_1) = -\frac{1}{2}(3 - \sqrt{13}),$$

oder die beiden Gleichungen sind:

$$x^2 + \frac{1}{2}(1 - \sqrt{13}) \cdot x^2 - x + \frac{1}{2}(-3 + \sqrt{13}) = 0$$

und

$$x^2 + \frac{1}{2}(1 + \sqrt{13}) \cdot x^2 - x + \frac{1}{2}(-3 - \sqrt{13}) = 0.$$

Man konnte natürlich auch  $A_1 \cdot B_1$  direkt aus den Zeigern berechnen.

Die obige Gleichung soll in drei Gleichungen zweiten Grades zerlegt werden.

Die gesuchten Gleichungen seien:

$$x^2 + A_1 \cdot x + A_2 = 0 \text{ (Wurz. 1. 5.)}, \quad x^2 + B_1 \cdot x + B_2 = 0 \text{ (Wurz. 11. 3.)}, \\ x^2 + C_1 \cdot x + C_2 = 0 \text{ (Wurz. 9. 7.). —}$$

Man findet:

$$A_2 = x_7 + x_9 = -C_1, \quad B_2 = x_1 + x_5 = -A_1, \quad C_2 = x_3 + x_{11} = -B_1,$$

d. h. die drei Gleichungen lauten:

$$x^2 + A_1 \cdot x - C_1 = 0, \quad x^2 + B_1 \cdot x - A_1 = 0, \quad x^2 + C_1 \cdot x - B_1 = 0.$$

Auf dem gewöhnlichen Wege der Elimination findet sich nun, dass die Gleichung  $A_1^3 - A_1^2 - 4A_1 - 1 = 0$  zu lösen, um die Werthe für  $A_1, B_1, C_1$  zu erhalten; da  $B_1$  positiv,  $A_1, C_1$  negativ sein müssen, der absolute Werth von  $A_1$  aber grösser als der von  $C_1$ , so sieht man auch, wie die drei Werthe der obigen Gleichungen zu vertheilen seien.

II. Die Gleichung des 34-Ecks (cfr. §§. 16., 17.) ist nach der Methode der §§. 23., 24. zu zerlegen. Die eine Gleichung enthalte die Diagonalen 1. 15. 13. 9. als Wurzeln; man bildet die Reihe:

$$\begin{array}{c|c|c} 9. & 7. & 5. \\ 7. & 11. & 13. \end{array} \begin{array}{c|c|c} 3. & 5. & 11. \\ 1. & 3. & 15. \end{array} \quad \text{und erhält:}$$

$$A_2 = -A_1 - 2B_1 = -1 - B_1, \quad \text{desgleichen} \quad B_2 = -1 - A_1,$$

da  $A_2 + B_2 + A_1 \cdot B_1 = -7$  ist, so folgt  $A_1 \cdot B_1 = -4$ , und hieraus  $A_1 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{17})$ ,  $B_1 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{17})$ . Dass  $A_4, B_4 = -1$  sei, wissen wir aus §. 15. Zerlegen wir nun die Gleichung in vier Gleichungen zweiten Grades, nämlich in:

$$x^2 + a_1 \cdot x + a_2 = 0 \text{ (mit den Wurzeln } x_1, x_{13}), \\ x^2 + b_1 \cdot x + b_2 = 0 \text{ (mit den Wurzeln } x_{15}, x_9),$$

$$x^3 + \alpha_1 \cdot x + \alpha_2 = 0 \quad (\text{mit den Wurzeln } x_3, x_5),$$

$$x^3 + \beta_1 \cdot x + \beta_2 = 0 \quad (\text{mit den Wurzeln } x_{11}, x_7),$$

so erhält man:

$$a_2 = x_1 \cdot x_{13} = x_3 + x_5 = -\alpha_1, \quad b_2 = x_9 \cdot x_{15} = x_7 + x_{11} = -\beta_1;$$

Da  $a_2 \cdot b_2 = -1 = \alpha_1 \cdot \beta_1$  ist, so hat man die Gleichungen:

$$\alpha_1 + \beta_1 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{17}), \quad \alpha_1 \cdot \beta_1 = -1.$$

folglich:

$$\alpha_1 - \beta_1 = \pm \sqrt{\frac{17 + \sqrt{17}}{2}} = \pm \frac{\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}{2};$$

Da  $\alpha_1$  negativ,  $\beta_1$  positiv ist, so ergibt sich:

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{17} - \sqrt{34 + 2\sqrt{17}}), \quad \beta_1 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{17} + \sqrt{34 + 2\sqrt{17}}).$$

Man findet ebenso  $\alpha_2 = -b_1$ ,  $\beta_2 = -a_1$ , folglich  $a_1 \cdot b_1 = -1$ ,  $a_1 + b_1 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{17})$ , d. h.  $a_1 - b_1 = \pm \frac{1}{2}\sqrt{34 - 2\sqrt{17}}$ ; da  $a_1$  negativ,  $b_1$  positiv ist, so ist:

$$a_1 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}), \quad b_1 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}),$$

d. h. die Coefficienten der vier gesuchten Gleichungen sind jetzt bestimmt.

III. Die Gleichung des 42-Ecks ist bereits in §. 8. in Factoren zerlegt worden. Der Factor  $x^6 - x^5 - 6x^4 + 6x^3 + 8x^2 - 8x + 1 = 0$  enthält als Wurzeln die Periode (1. 19. 17. 13. 5. 11.). Man zerlege in

$$x^3 + A_1 \cdot x^2 + A_2 \cdot x + A_3 = 0 \quad (\text{Wurzeln 1. 17. 5.})$$

und

$$x^3 + B_1 \cdot x^2 + B_2 \cdot x + B_3 = 0 \quad (\text{Wurzeln 19. 13. 11.}).$$

Man erhält nach der Methode des §. 24.:

$$A_2 = x_3 + x_9 + x_{15} + x_1 + x_5 + x_{17}.$$

Die Diagonalen  $x_3, x_9, x_{15}$  sind Wurzeln der Gleichung  $x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0$ , folglich  $x_3 + x_9 + x_{15} = -1$ , also ist  $A_2 = -1 - A_1$ ,  $B_2 = -1 - B_1$ , und da  $A_2 + B_2 + A_1 \cdot B_1 = -6$  ist, so ist weiter  $A_1 \cdot B_1 = -5$ , folglich  $A_1 - B_1 = \pm \sqrt{21}$ ;  $A_1$  muss negativ,  $B_1$  positiv sein, also ist:

$$A_1 = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{21}), \quad B_1 = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{21});$$

$$A_2 = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{21}), \quad B_2 = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{21}).$$

Es findet sich:



$$A_2 = -x_1 \cdot x_{17} \cdot x_5 = -x_5(x_3 + x_5) = -(x_{17}^2 + x_1^2 + x_5^2 - 4) \\ = -(2 - B_1) = -\frac{1}{2}(5 - \sqrt{21}),$$

die beiden Gleichungen sind also:

$$x^3 - \frac{1}{2}(1 + \sqrt{21})x^2 + \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{21})x - \frac{1}{2}(5 - \sqrt{21}) = 0$$

und

$$x^3 - \frac{1}{2}(1 - \sqrt{21})x^2 + \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{21})x - \frac{1}{2}(5 + \sqrt{21}) = 0.$$

Soll dieselbe Gleichung in drei Gleichungen zweiten Grades zerlegt werden, so seien dieselben:

$$x^2 + A_1 \cdot x + A_2 = 0 \text{ (mit den Wurzeln 1. 13.)},$$

$$x^2 + B_1 \cdot x + B_2 = 0 \text{ (Wurzeln 19. 5.)},$$

$$x^2 + C_1 \cdot x + C_2 = 0 \text{ (Wurzeln 17. 11.)}.$$

Man erhält:

$$A_2 = -1 + x_9, \quad B_2 = -1 + x_3, \quad C_2 = -1 + x_{15}.$$

Ist also die Gleichung  $x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0$ , deren Wurzeln  $x_9, x_{15}$  sind, gelöst, so ist  $A_2, B_2, C_2$  bestimmt, und wird dann  $A_1, B_1, C_1$  aus den Gleichungen finden, die man erhält, wenn man die drei gesuchten Gleichungen multiplicirt und erhaltenen Coefficienten mit denen der gegebenen Gleichung zusammenhält.

IV. Die Gleichung des 50-Ecks lautet, nachdem die Gleichung des 10-Ecks entfernt ist:

$$x^{10} - 10x^8 + 35x^6 + x^5 - 50x^4 - 5x^3 + 25x^2 + 5x - 1 = 0;$$

ihre Wurzeln bilden die Periode: 1. 23. 21. 17. 9. 7. 11. 3. 19. 1. Die Gleichung soll zerlegt werden in:

$$x^5 + A_1 \cdot x^4 + A_2 \cdot x^3 + A_3 \cdot x^2 + A_4 \cdot x + A_5 = 0 \text{ (mit den Wurz. 1. 21. 9. 11. 1)}$$

und in:

$$x^5 + B_1 \cdot x^4 + B_2 \cdot x^3 + B_3 \cdot x^2 + B_4 \cdot x + B_5 = 0 \text{ (mit den Wurz. 23. 17. 7. 3. 19)}$$

Es ist  $A_1 + B_1 = 0$ ; nach §. 24. findet man:

$$A_2 = 2(x_{23} + x_{17} + x_7 + x_3 + x_{13}) + 5(x_5 + x_{15}) = -2B_1 - 5,$$

desgleichen:

$$B_2 = -2A_1 - 5;$$

da nun:

$$A_2 + B_2 + A_1 \cdot B_1 = -2(A_1 + B_1) - 10 + A_1 \cdot B_1 = -1$$



## VI. Die Gleichung des 62-Ecks:

$$x^{15} - x^{14} - 14x^{13} + 13x^{12} + 78x^{11} - 66x^{10} - 220x^9 + 168x^8 \\ + 330x^7 - 210x^6 - 255x^5 + 126x^4 + 84x^3 - 28x^2 - 8x + 1 = 0$$

hat 15 Wurzeln, die drei Perioden bilden. Die Gleichung  $x^{15} - 1 = 0$  in drei Gleichungen zerlegt werden:

$$x^5 + A_1 x^4 + A_2 x^3 + A_3 x^2 + A_4 x + A_5 = 0 \text{ (Wurz. } x_1, x_{29}, x_{27}, x_{23}, x_1)$$

$$x^5 + B_1 x^4 + B_2 x^3 + B_3 x^2 + B_4 x + B_5 = 0 \text{ (Wurz. } x_3, x_{25}, x_{19}, x_7, x_1)$$

$$x^5 + C_1 x^4 + C_2 x^3 + C_3 x^2 + C_4 x + C_5 = 0 \text{ (Wurz. } x_5, x_{21}, x_{11}, x_9, x_1)$$

Man findet:

$$A_2 = A_1 + 2B_1 + C_1 = B_1 - 1 = \frac{1}{2}(A_1^2 - A_1 - 10);$$

folglich:

$$A_1^2 = 8 + A_1 + 2B_1;$$

desgleichen:

$$B_1^2 = 8 + B_1 + 2C_1; \quad C_1^2 = 8 + C_1 + 2A_1;$$

hieraus ergeben sich im Verein mit  $A_1 + B_1 + C_1 = -1$  Gleichungen:

$$A_1 \cdot B_1 = -4 - 2B_1; \quad B_1 \cdot C_1 = -4 - 2C_1; \quad C_1 \cdot A_1 = -4 - 2A_1$$

und eliminirt man  $B_1, C_1$ , so erhält man:

$$A_1^3 + A_1^2 - 10A_1 - 8 = 0;$$

die Gleichung hat drei reelle Wurzeln, die positive bezeichne man mit  $z_a$ , sie giebt den Werth für  $A_1$ , denn es ist

$$A_1 = -(x_1 + x_{29} + x_{27} + x_{23} + x_{15})$$

positiv; von den negativen Wurzeln bezeichne man die absolute grössere mit  $z_b$ , die kleinere mit  $z_c$ , so ist:

$$C_1 = z_b, \quad B_1 = z_c;$$

$A_2, B_2, C_2$  sind jetzt auch bekannt;  $A_3, B_3, C_3$  sind  $= -A_2, -B_2, -C_2$ ;  $A_4, B_4, C_4$  ergeben sich ohne Schwierigkeit aus den Gleichungen des §. 15. gegen Ende.

VII. Die Gleichung des 66-Ecks lautet, nachdem der Factor  $x + 1$  entfernt:

$$x^{15} - 15x^{13} + x^{12} + 90x^{11} - 12x^{10} - 274x^9 + 54x^8 \\ + 441x^7 - 111x^6 - 351x^5 + 99x^4 + 111x^3 - 27x^2 - 9x + 1 = 0.$$

Nach §. 13. bilden die 15 Wurzeln drei Perioden zu fünf Gliedern.  
— Man soll die Gleichung zerlegen in:

$$x^5 + A_1 \cdot x^4 + A_2 \cdot x^3 + A_3 \cdot x^2 + A_4 \cdot x + A_5 = 0$$

(Wurzeln  $x_1, x_{31}, x_{29}, x_{25}, x_{17}$ ),

$$x^5 + B_1 \cdot x^4 + B_2 \cdot x^3 + B_3 \cdot x^2 + B_4 \cdot x + B_5 = 0$$

(Wurzeln  $x_3, x_{27}, x_{21}, x_9, x_{15}$ ),

$$x^5 + C_1 \cdot x^4 + C_2 \cdot x^3 + C_3 \cdot x^2 + C_4 \cdot x + C_5 = 0$$

(Wurzeln  $x_5, x_{23}, x_{13}, x_7, x_{19}$ ).

Man findet:

$$A_2 = -A_1 - 2B_1 - C_1 = -B_1; \quad B_2 = -4B_1; \quad C_2 = -B_1.$$

Aus der zweiten dieser Gleichungen folgt:

$$B_1^2 + B_1 - 10 = -8B_1.$$

oder:

$$B_1 = -\frac{9}{2} \pm \frac{11}{2}.$$

Da die Summe der Wurzeln  $x_3, x_{27}, x_{21}, x_9, x_{15}$  negativ,  $B_1$  also positiv sein muss, so folgt:

$$B_1 = +1, \quad B_2 = -4;$$

aus den Gleichungen (29), (30) ergibt sich:

$$B_3 = -3, \quad B_4 = +3,$$

d. h. die Gleichung lautet:

$$x^5 + x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 3x + 1 = 0,$$

eine Gleichung, die sich auch daraus ergibt, dass die Wurzeln derselben die ungeraden Diagonalen des regulären 22-Ecks sind.

Aus  $A_2 = -B_1$  folgt:

$$A_1^2 + A_1 = 8 \quad \text{oder} \quad A_1 = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{33});$$

da  $A_1$  negativ sein muss, so ist:

$$A_1 = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{33}), \quad C_1 = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{33}). \quad A_2 = C_2 = -1.$$

Es findet sich aus (29), (30):

$$A_3 = \frac{1}{2}(9 + 3\sqrt{33}), \quad A_4 = -6 - \sqrt{33} \text{ u. s. w.};$$

die gesuchten Gleichungen sind also:

$$x^5 - \frac{1}{2}(1 + \sqrt{33})x^4 - x^3 + \frac{1}{2}(9 + 3\sqrt{33})x^2 - (6 + \sqrt{33})x + 1 = 0$$

und

$$x^6 - \frac{1}{2}(1 - \sqrt{33})x^4 - x^3 + \frac{1}{2}(9 - 3\sqrt{33})x^2 - (6 - \sqrt{33})x + 1 = 0$$

## §. 26.

Gegen die im Vorhergehenden angewendete Zerlegung lässt sich der Einwand erheben, sie sei in vielen Fällen sehr breit und ihre Benutzung zeitraubend. Wollte man nach ihr z. B. die Gleichung des regulären 386-Ecks, dessen Diagonalen zwei Perioden von 48 Gliedern bilden, in zwei Gleichungen:

$$x^{48} + A_1 \cdot x^{47} + \dots = 0 \quad \text{und} \quad x^{48} + B_1 \cdot x^{47} + \dots = 0$$

zerlegen, so müsste man zur Berechnung von  $A_1 \cdot B_1$ , selbst wenn man die nöthigen Additionen, Subtractionen, Divisionen durch 2 nicht rechnet, 4608 Zahlen schreiben. — Diese allerdings bedeutende Arbeit wird aber durch Anwendung des folgenden Satzes und der daraus zu ziehenden Folgerungen sehr verringert:

Bezeichnet man die Diagonalen eines regulären  $2(2n+1)$ -Ecks nur mit ihren Zeigern, und sind  $a, b$  zwei der ungeraden Diagonalen des Vielecks, die entweder derselben oder verschiedenen Perioden angehören, hat man ferner gefunden, es sei  $a \cdot b = r^2 + s^2 - 4$ , es sind also  $r, s$  ungerade Diagonalen desselben Vielecks, folgt auf  $a$  in seiner Periode  $c$ , auf  $b$  aber  $d$  und es ist  $c \cdot d = x^2 + y^2 - 4$ , so folgt in der Periode, zu der  $r$  gehört, auf  $r$  entweder  $x$ , und dann folgt auf  $s$  auch  $y$ , oder es folgt  $y$  auf  $r$  und  $x$  auf  $s$  in den betreffenden Perioden.

Die Diagonalen  $a, b$  haben entweder die Form  $4\mu+1$  oder  $4\mu+3$ ; auf jede Diagonale  $2m+1$  folgt im  $2(4n+1)$ -Ecke (für dieses soll der Beweis geführt werden, er ist ganz ähnlich für die  $2(4n+3)$ -Ecke zu führen) entweder  $4(n-m)-1$  oder  $4(m-n)+1$ . — Die verschiedenen hier möglichen Fälle sind:

I. Es ist:

$$a = 4m+1, \quad b = 4\mu+1, \quad a \cdot b = (2m+2\mu+1)^2 + (4n+1-2m+2\mu)^2 - 4;$$

nun sei:

$$1) \quad c = 4(n-2m)-1 \quad \text{und} \quad d = 4(n-2\mu)-1,$$

dann ist:

$$c \cdot d = (4n-4m-4\mu-1)^2 + (4n+1-4m+4\mu)^2 - 4;$$

$$2) \quad c = 4(n - 2m) - 1 \text{ und } d = 4(2\mu - n) + 1,$$

dann ist:

$$c \cdot d = (4n + 1 + 4m - 4\mu)^2 + (4n - 4m - 4\mu - 1)^2 - 4;$$

$$3) \quad c = 4(2m - n) + 1 \text{ und } d = 4(2\mu - n) + 1,$$

dann ist:

$$c \cdot d = (4m + 4\mu - 4n + 1)^2 + (4n + 1 - 4m + 4\mu)^2 - 4.$$

II. Es ist:

$$a = 4m + 1, \quad b = 4\mu + 3, \quad a \cdot b = (2m - 2\mu - 1)^2 + (4n - 1 - 2m - 2\mu)^2 - 4;$$

man sei:

$$1) \quad c = 4(n - 2m) - 1 \text{ und } d = 4(n - 2\mu - 1) - 1,$$

dann ist:

$$c \cdot d = (4n - 4m - 4\mu - 3)^2 + (4n + 4m - 4\mu - 1)^2 - 4;$$

$$2) \quad c = 4(n - 2m) - 1 \text{ und } d = 4(2\mu + 1 - n) + 1,$$

dann ist:

$$c \cdot d = (4n + 4m - 4\mu - 1)^2 + (4n - 4m - 4\mu - 3)^2 - 4;$$

$$3) \quad c = 4(2m - n) + 1 \text{ und } d = 4(2\mu + 1 - n) + 1,$$

dann ist:

$$c \cdot d = (4m + 4\mu - 4n + 3)^2 + (4n + 1 + 4m - 4\mu)^2 - 4.$$

III. Es ist:

$$a = 4m + 3, \quad b = 4\mu + 3, \quad a \cdot b = (2m + 2\mu + 3)^2 + (4n + 1 - 2m + 2\mu)^2 - 4;$$

man sei:

$$1) \quad c = 4(n - 2m - 1) - 1 \text{ und } d = 4(n - 2\mu - 1) - 1,$$

dann ist:

$$c \cdot d = (4n - 4m - 4\mu - 5)^2 + (4n + 1 - 4m + 4\mu)^2 - 4;$$

$$2) \quad c = 4(n - 2m - 1) - 1 \text{ und } d = 4(2\mu + 1 - n) + 1,$$

dann ist:

$$c \cdot d = (4n + 1 - 4m + 4\mu)^2 + (4n - 4m - 4\mu - 5)^2 - 4;$$

$$3) \quad c = 4(2m + 1 - n) + 1 \text{ und } d = 4(2\mu + 1 - n) + 1,$$

man ist:

$$c.d = (4m + 4\mu - 4n + 5)^2 + (4n + 1 - 4m + 4\mu)^2 - 4,$$

und man überzeugt sich leicht, dass in der That die Glieder, die dem Produkte  $c.d$  entsprechen, in ihren Perioden folgen den Gliedern, die dem Produkte  $a.b$  gleich sind. Cfr. §. 14.

Statt  $r^2, s^2, x^2, y^2$  aber lässt sich setzen  $2 \pm$  dem in der Periode folgenden Gliede, und geschieht dieses, so kann man folgenden Satz aufstellen:

Folgt in einer der Perioden der ungeraden Diagonalen eines regulären Vielecks  $x_c$  auf  $x_a$ , und in derselben oder in einer anderen Periode desselben Vielecks  $x_d$  auf  $x_b$ , setzt man statt der Produkte  $x_a \cdot x_b$  und  $x_c \cdot x_d$  die ihr gleiche positive (negative) Summe zweier ungeraden Diagonalen desselben Vielecks, ist also:

$$x_a \cdot x_b = \pm (x_\alpha + x_\beta), \quad x_c \cdot x_d = \pm (x_\gamma + x_\delta),$$

so folgt in der betreffenden Periode  $x_\gamma$  entweder auf  $x_\alpha$  und dann folgt  $x_\delta$  auf  $x_\beta$ , oder es folgt  $x_\gamma$  auf  $x_\beta$  und dann folgt  $x_\delta$  auf  $x_\alpha$ .

Es seien  $x_m, x_n, x_p, x_r, \dots x_s, x_t$  die auf einander folgenden Glieder einer Periode, ihre Summe  $= -A_1$ ;  $x_\mu, x_\nu, x_\xi, x_\rho, \dots x_\sigma, x_\tau$  die auf einander folgenden Glieder einer andern Periode desselben Vielecks, ihre Summe  $= -B_1$ ; das Produkt  $A_1 \cdot B_1$  kann man dann schreiben:

[illegible]

Dass diese Summe das verlangte Produkt darstellt, geht daraus hervor, dass jede Vertikalreihe die Produkte enthält aus demselben Summanden der zweiten Periode in die sämtlichen Summanden der ersten Periode. Die Produkte jeder Horizontalreihe stehen aber in solcher Ordnung hintereinander, dass die Factors des folgenden Produktes die Glieder der Perioden sind, die auf die Factors des vorhergehenden Produktes folgen; denkt man also statt jedes Produktes die positive oder negative Summe der beiden Diagonalen gesetzt, mit der das Produkt gleich ist, so bilden diese Summen die auf einander folgenden Glieder zweier Perioden des Vielecks, statt jeder Horizontalreihe ist also die positive oder negative Summe zweier Perioden des Vielecks zu







glied aus der Zahl derer, deren negative Summe  $= -b_1$  gehört  $\mp b_1$  als ein Summand zu  $a_1 \cdot b_1$ ;  $\mp c_1$  desgl. zu  $a_1 \cdot c_1$  aber zu  $c_1 \cdot a_1$  u. s. w. Die Sache verhält sich auf diese Weise, wenn  $x_r$  zu einer Periode gehört, die mit der deren Gleichung wir zerlegen wollen, gleiche Gliederzahl dem einen Gliede ergeben sich unmittelbar die Diagonalen Summe unter die Summanden von  $a_1 \cdot b_1$ ,  $b_1 \cdot c_1$ ,  $c_1 \cdot a_1$  men sind. — Ist aber  $x_r$  einer Periode angehörig, die  $r$  Glieder hat, so wird sich leicht bestimmen lassen, welche derselben und in welcher Zahl jedes den Summen zuzurechnen sind, die gleich  $a_1 \cdot b_1$ ,  $b_1 \cdot c_1$ ,  $c_1 \cdot a_1$  sind.

Das selbe Verfahren lässt sich aber auch anwenden, wenn eine Periode  $5m$ ,  $7m$ , .... Glieder hat, man hat nur bei  $5m$  z. B. die erste Vertikal-Reihe in 1.2, 1.7, 1.12, 1.17 zu ändern, und findet durch Verwandlung dieser Produkte unmittelbar die Werthe von  $a_1 \cdot b_1$ ,  $b_1 \cdot c_1$ ,  $c_1 \cdot a_1$ .

Die Diagonalen des 70-Ecks bilden 3 Perioden. Periode I. die Diagonalen 4. 21; Periode II. die Diagonalen 5. 25. 15 (14-Periode III. die Diagonalen 1. 33. 31. 27. 19. 3. 29. 23. 11. Die negative Summe der Glieder der dritten Periode §. 8. = 1. Die Gleichung, deren Wurzeln die Glieder der Periode sind, soll in 3 Gleichungen zerlegt werden. So:

$$= x_1 + x_{27} + x_{29} + x_{13}; -b_1 = x_{33} + x_{19} + x_{23} + x_9;$$

$$-c = x_{31} + x_3 + x_{11} + x_{17}.$$

Findet man den Zeiger 1 mit den Zeigern 33, 19, 23, 9 so findet man die Reihen:

$$17. 25. 23. 5.$$

$$19. 9. 11. 31.'$$

Setzt man statt der Quadrate die in der Periode folgenden ein, so setzt:

$$1. 15. 11. 25.$$

$$3. 17. 13. 27.$$

Zahlen 1, 13, 27 gehören zu  $a_1$ ; 3, 17, 11 zu  $c_1$ ; 15, 25 der Periode II. zu, die aus drei Gliedern besteht, während die Periode III. 12 Glieder enthält, mithin ist:

$$a_1 + 3c_1 - 4(x_{15} + x_{25}); \quad b_1 \cdot c_1 = 3b_1 + 3a_1 - 4(x_5 + x_{15});$$

$$c_1 \cdot a_1 = 3c_1 + 3b_1 - 4(x_{25} + x_5);$$

sind also  $x_8, x_{16}, x_{24}$  bestimmt, so lassen sich auch  $a_1, b_1, c_1$  finden.

**§. 28.**

Bei einer Anzahl regulärer  $2(4n+1)$ -Ecke bilden sämtliche  $2n$  ungerade Diagonalen eine einzige Periode. (26, 58, 74, 106, 122, .... -Eck gehören dazu.) Die Summe aller ungeraden Diagonalen eines solchen Vielecks ist  $= -1$  [Gleichung (21)]. Die negative Summe der an den ungeraden Stellen der Periode stehenden Diagonalen sei  $a_1$ ; die negative Summe der an den geraden Stellen stehenden Diagonalen sei  $b_1$ ; also  $a_1 + b_1 = 1$ . Man bilde folgende Reihe von Produkten:

[illegible]

Die  $n$  Vertikalreihen, die an den ungeraden Stellen stehen, addirt geben  $a_1.b_1$ ; ebenso gross ist die Summe der  $n$  Vertikalreihen, die an den geraden Stellen stehen; die Gesammtheit aller Produkte ist also  $2a_1.b_1$ . Setzt man statt jedes Produktes die Summe der beiden Diagonalen, die dem Produkte gleich ist, so ist die Summe jeder Horizontalreihe gleich der doppelten Summe aller ungeraden Diagonalen des Vielecks; da also  $n$  Horizontalreihen vorhanden sind, so ist:

$$a_1, b_1 = -n \text{ oder } a_1 = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{1+4n}), \quad b_1 = \frac{1}{2}(1 \mp \sqrt{1+4n}).$$

**§. 29.**

Die Zusammenstellung von Produkten immer zweier Diagonalen, wie sie in §. 27. gegeben, zeigt in dem Falle, wo das betreffende Vieleck  $3m$  Diagonalen hat, die sämtlich nur eine Periode bilden (ein Fall, der bei dem 38, 74, 122, 134, .... -Eck vorliegt), dass  $a_1.b_1 + b_1.c_1 + c_1.a_1 = -2m$  sei. Dass die Summe aller jener Produkte  $= a_1.b_1 + b_1.c_1 + c_1.a_1$  sei, ist schon §. 27. gezeigt. Setzt man statt jedes Produktes die entsprechende Summe zweier Diagonalen, so stellt jede der  $m$  Horizontalreihen dieselbe Periode aller ungeraden Diagonalen des Vielecks zwei-



ist; und

$$3a_1 \cdot b_1 \cdot c_1 = 21,$$

also ist:

$$x^3 + x^2 - 6x - 7 = 0$$

zu lösen; die Wurzeln der Gleichungen geben die Werthe für  $a_1, b_1, c_1$ . —

Die Periode der Diagonalen des regulären 74-Ecks lautet:

1. 35. 33. 29. 21. 5. 27. 17. 3. 31. 25. 13. 11. 15. 7. 23. 9. 19;

man setze:

$$-a_1 = x_1 + x_{29} + x_{27} + x_{31} + x_{11} + x_{23};$$

$$-b_1 = x_{35} + x_{21} + x_{17} + x_{25} + x_{13} + x_9;$$

$$-c_1 = x_{33} + x_5 + x_3 + x_{15} + x_7 + x_{19}.$$

Es ist:

$$a_1 + b_1 + c_1 = 1; a_1 \cdot b_1 = -5a_1 - 4b_1 - 3c_1;$$

also:

$$a_1 \cdot b_1 + b_1 \cdot c_1 + c_1 \cdot a_1 = -12; a_1 \cdot b_1 \cdot c_1 = 11;$$

oder die Wurzeln von  $x^3 - x^2 - 12x - 11 = 0$  geben die Werthe von  $a_1, b_1, c_1$ . —

### §. 30.

Die Diagonalen des regulären 146-Ecks bilden 4 Perioden (cfr. §. 13.); während sich in Periode I. der Zeiger 1 findet, hat man in Periode III. den Zeiger 5, in Periode II. den Zeiger 25, dabei aber auch den Zeiger 3, in Periode IV. den Zeiger 15, dabei auch den Zeiger 11; in Periode I. ist auch der Zeiger 55; stellt man also die Perioden in folgender Reihe hinter einander: I., III., II., IV., I., so findet sich in jeder Periode ein Zeiger, der das Fünffache ist von einem Zeiger der vorhergehenden Periode. Stellt man die Perioden des regulären 514-Ecks in folgender Reihe hinter einander I., IX., II., X., III., XI., IV., XII., V., XIII., VI., XIV., VII., XV., VIII., XVI., I., so ist in jeder Periode ein Zeiger, der das Dreifache ist von einem Zeiger der vorhergehenden Periode. — Es seien  $a_1, a_2, a_3, \dots$  Zeiger auf einander folgender Glieder einer;  $b_1, b_2, b_3, \dots$  eben solche Zeiger einer andern oder auch derselben Periode eines regulären  $2(2n+1)$ -Ecks; ferner sei  $b_1 = (2n+1)a_1$ . Aus §. 14. ist bekannt, dass

$$2a_1 \equiv \pm a_2; 2a_2 \equiv \pm a_3; \dots 2b_1 \equiv \pm b_2; 2b_2 \equiv \pm b_3; \dots (\text{Mod. } 2n+1),$$



hat gefunden, es sei das Produkt irgend zweier dieser Diagonalen  $x_a \cdot x_b$  gleich der positiven oder negativen Summe der Diagonalen  $x_m$  und  $x_s$ , so ist das Produkt der unter  $x_a, x_b$  stehenden Diagonalen gefunden, wenn man die positive oder negative Summe der beiden unter  $x_m, x_s$  stehenden Diagonalen nimmt.

Der Satz lässt sich übrigens auch ganz in der Art beweisen, wie es bei dem entsprechenden in §. 26. geschehen; der letztere Satz ergibt sich aus dem obigen, wenn man Perioden nach dem Factor 2 unter einander ordnet. — Es ergibt sich nun aber auch folgender Satz:

Sind die Perioden eines regulären  $2(2n+1)$ -Ecks nach dem Factor  $2m+1$  unter einander geordnet, und sind  $x_1, x_2, x_3, \dots$  beliebige Diagonalen einer,  $r_1, r_2, r_3, \dots$  beliebige Diagonalen, sei es derselben sei es einer andern Periode dieses Vielecks; sind ferner  $z_1, z_2, z_3, \dots$  die unter  $x_1, x_2, x_3, \dots$  und  $\bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3, \dots$  die unter  $r_1, r_2, r_3, \dots$  stehenden Diagonalen; ist endlich  $(x_1+x_2+x_3+\dots)(r_1+r_2+r_3+\dots) = \pm(p_1+p_2+p_3+\dots)$  gefunden, wo  $p_1, p_2, p_3, \dots$  beliebige Diagonalen desselben Vielecks sind, so erhält man die Summe, welche gleich dem Produkte  $(z_1+z_2+z_3+\dots)(\bar{z}_1+\bar{z}_2+\bar{z}_3+\dots)$  ist, wenn man die Summe der Diagonalen nimmt, die unter  $p_1, p_2, p_3, \dots$  stehen.

### §. 31.

Wir wollen im Folgenden nur Vielecke betrachten, bei denen  $4n+1$  oder  $4n+3$  eine Primzahl ist. Die  $2n$  ungeraden Diagonalen eines  $2(4n+1)$ -Ecks bilden zwei Perioden;  $A_1, B_1$  seien die negativen Summen der Glieder dieser Perioden; nach §. 26. ergibt sich:

$$A_1 \cdot B_1 = \alpha \cdot A_1 + \beta \cdot B_1,$$

folglich nach §. 30.:

$$B_1 \cdot A_1 = \alpha \cdot B_1 + \beta \cdot A_1,$$

d. h. es ist  $\alpha = \beta$ , und da  $\alpha + \beta$  dem absoluten Werthe nach  $= 2n$  sein muss, so ist:

$$A_1 \cdot B_1 = -n; A_1 + B_1 = 1. \text{ cfr. §. 28.}$$

Die  $n$  ungeraden Diagonalen eines  $2(2n+1)$ -Ecks bilden 3 Perioden;  $A_1, B_1, C_1$  seien die negativen Summen der Glieder jeder dieser Perioden, auch mögen sie nach einem Factor  $2m+1$

untereinander geordnet, in der genannten Reihe einander folgen. Nach §. 26. habe man erhalten:

$$A_1 \cdot B_1 = \alpha \cdot A_1 + \beta \cdot B_1 + \gamma \cdot C_1,$$

und ist nach §. 30.:

$$B_1 \cdot C_1 = \alpha \cdot B_1 + \beta \cdot C_1 + \gamma \cdot A_1,$$

$$C_1 \cdot A_1 = \alpha \cdot C_1 + \beta \cdot A_1 + \gamma \cdot B_1,$$

folglich:

$$A_1 \cdot B_1 + B_1 \cdot C_1 + C_1 \cdot A_1 = \pm(\alpha + \beta + \gamma) \text{ cfr. §. 29.}$$

Ebenso wie in §. 29. kann man jetzt zeigen, dass auch  $A_1 \cdot B_1 \cdot C_1$  gleich einer nur von  $\alpha, \beta, \gamma$  abhängigen Grösse sei;  $A_1, B_1, C_1$  sind also Wurzeln einer kubischen Gleichung.

Die  $2n$  ungeraden Diagonalen eines  $2(4n+1)$ -Ecks bilden  $n$  Perioden;  $A_1, B_1, C_1, D_1$  seien die negativen Summen der Glieder dieser Perioden, die nach dem Factor  $(2m+1)$  untereinander geordnet in der Reihe  $A_1, B_1, C_1, D_1, A_1$  einander folgen liegen. Nach §. 26. habe sich ergeben:

$$A_1 \cdot B_1 = \alpha \cdot A_1 + \beta \cdot B_1 + \gamma \cdot C_1 + \delta \cdot D_1,$$

und ist:

$$B_1 \cdot C_1 = \alpha \cdot B_1 + \beta \cdot C_1 + \gamma \cdot D_1 + \delta \cdot A_1,$$

$$C_1 \cdot D_1 = \alpha \cdot C_1 + \beta \cdot D_1 + \gamma \cdot A_1 + \delta \cdot B_1,$$

$$D_1 \cdot A_1 = \alpha \cdot D_1 + \beta \cdot A_1 + \gamma \cdot B_1 + \delta \cdot C_1;$$

folglich:

$$(A_1 + C_1)(B_1 + D_1) = \alpha + \beta + \gamma + \delta = -n,$$

und da:

$$A_1 + B_1 + C_1 + D_1 = 1,$$

so findet man  $A_1 + C_1$  und  $B_1 + D_1$  durch eine quadratische Gleichung.

Es sei ferner erhalten worden:

$$A_1 \cdot C_1 = \mu \cdot A_1 + \nu \cdot B_1 + \pi \cdot C_1 + \varrho \cdot D_1,$$

folglich:

$$B_1 \cdot D_1 = \mu \cdot B_1 + \nu \cdot C_1 + \pi \cdot D_1 + \varrho \cdot A_1,$$

$$C_1 \cdot A_1 = \mu \cdot C_1 + \nu \cdot D_1 + \pi \cdot A_1 + \varrho \cdot B_1,$$

$$D_1 \cdot B_1 = \mu \cdot D_1 + \nu \cdot A_1 + \pi \cdot B_1 + \varrho \cdot C_1;$$

mithin ergibt sich:

$$(\mu - \pi)(A_1 - C_1) = (\varrho - \nu)(B_1 - D_1)$$



und

$$(\rho - \nu)(A_1 - C_1) = (\mu - \pi)(B_1 - D_1),$$

d. h. es ist entweder  $\mu = \pi$  und  $\rho = \nu$  oder  $(A_1 - C_1)^2 = (B_1 - D_1)^2$ . Da die letzte Gleichung entweder  $A_1 - C_1 = B_1 - D_1$  oder  $A_1 - C_1 = D_1 - B_1$  giebt, so erhält man aus ihr und  $A_1 + B_1 + C_1 + D_1 = 1$ , dass entweder  $A_1 + B_1 = \frac{1}{2}$ , also  $A_1 + B_1 = C_1 + D_1$  oder dass  $A_1 + D_1 = B_1 + C_1$  ist. Da beide Gleichungen unmöglich sind, so muss  $\mu = \pi$  und  $\rho = \nu$  sein; alsdann aber ist:

$$A_1 \cdot C_1 = \mu(A_1 + C_1) + \nu(B_1 + D_1)$$

und

$$B_1 \cdot D_1 = \mu(B_1 + D_1) + \nu(A_1 + C_1),$$

also  $A_1, B_1, C_1, D_1$  sind durch quadratische Gleichungen zu finden.

Dieselben Gleichungen ergeben sich bei der Gleichung eines regulären  $2(4n+1)$ -Ecks, wenn die ungeraden Diagonalen eine Periode bilden, deren Gliederzahl durch 4 theilbar ist und diese Gleichung in vier neue Gleichungen zerlegt werden soll. —

Uebrigens lassen sich die Werthe von  $A_1, B_1, C_1, D_1$  auch ohne Berechnung der Produkte  $A_1 \cdot C_1, B_1 \cdot D_1$  finden; denn aus den ersten vier Gleichungen kann man  $(A_1 - C_1)(B_1 - D_1)$  wie  $(A_1 + C_1)(B_1 - D_1)$  berechnen.

Die Diagonalen des regulären 146-Ecks bilden vier Perioden (§. 13.). Die negativen Summen der Perioden I., II., III., IV. bezeichne man respective mit  $A_1, C_1, B_1, D_1$ ; die Perioden nach dem Factor 5 unter einander geordnet folgen dann  $A_1, B_1, C_1, D_1$ . Da  $n = 18$ , so ist  $(A_1 + C_1)(B_1 + D_1) = -18$  und da  $A_1 + B_1 + C_1 + D_1 = 1$  ist, so ergibt sich:

$$(A_1 + C_1) - (B_1 + D_1) = \pm \sqrt{73};$$

aus den Zeigern der Diagonalen folgt, dass  $A_1 + C_1$  negativ sein muss, folglich ist:

$$A_1 + C_1 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{73}); \quad B_1 + D_1 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{73}).$$

Es ist ferner:

$$A_1 \cdot C_1 = -4A_1 - 5B_1 - 4C_1 - 5D_1 = \frac{1}{2}(-9 - \sqrt{73}),$$

folglich:

$$(A_1 - C_1)^2 = \frac{1}{2}(73 + 3\sqrt{73}); \quad (B_1 - D_1)^2 = \frac{1}{2}(73 - 3\sqrt{73}),$$

und daher:

$$= \frac{1}{4}(1 - \sqrt{73} - \sqrt{146 + 6\sqrt{73}}; C_1 = \frac{1}{4}(1 - \sqrt{73} + \sqrt{146 + 6\sqrt{73}}); \\ = \frac{1}{4}(1 + \sqrt{73} - \sqrt{146 - 6\sqrt{73}}; D_1 = \frac{1}{4}(1 + \sqrt{73} + \sqrt{146 - 6\sqrt{73}}).$$

Die ungeraden Diagonalen eines regulären  $2(4n+1)$ -Ecks  
 en sechs Perioden bilden; oder eine Periode, deren Glieder-  
 durch 6 theilbar ist; oder zwei Perioden, die Zahl der Glieder  
 in jeder Periode aber durch 3 theilbar sein, in jedem Falle  
 läßt sich die Gleichung des Vielecks in sechs Gleichungen zer-  
 legen und zwar hat man dazu eine quadratische und eine kubi-  
 sche Gleichung zu lösen. — Im ersten Falle mögen  $A_1, B_1, C_1,$   
 $E_1, F_1$  die negativen Summen der sechs Perioden bezeichnen,  
 nach dem Factor  $(2m+1)$  unter einander geordnet sind; im  
 zweiten Falle bezeichne  $A_1$  die negative Summe der Glieder  
 1, 13, 19 u. s. w.,  $B_1$  die negative Summe der Glieder 2, 8,  
 20 u. s. w.; im dritten Falle ist  $A_1 + C_1 + E_1$  die negative  
 Summe der Glieder der einen,  $B_1 + D_1 + F_1$  die entsprechende  
 Summe der andern Periode, und zwar  $A_1$  die negative Summe  
 der Glieder 1, 4, 7, 10 u. s. w. — Aus

$$A_1 \cdot B_1 = \alpha \cdot A_1 + \beta \cdot B_1 + \gamma \cdot C_1 + \delta \cdot D_1 + \varepsilon \cdot E_1 + \xi \cdot F_1$$

eben sich  $B_1 \cdot C_1, C_1 \cdot D_1$  u. s. w., und daraus:

$$B_1 + B_1 \cdot C_1 + C_1 \cdot D_1 + D_1 \cdot E_1 + E_1 \cdot F_1 + F_1 \cdot A_1 = \alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \xi.$$

Aus

$$A_1 \cdot D_1 = \mu \cdot A_1 + \nu \cdot B_1 + \omicron \cdot C_1 + \pi \cdot D_1 + \varrho \cdot E_1 + \sigma \cdot F_1$$

folgt:

$$D_1 + B_1 \cdot E_1 + C_1 \cdot F_1 + D_1 \cdot A_1 + E_1 \cdot B_1 + F_1 \cdot C_1 = \mu + \nu + \omicron + \pi + \varrho + \sigma,$$

:

$$A_1 \cdot D_1 + B_1 \cdot E_1 + C_1 \cdot F_1 = \frac{1}{2}(\mu + \nu + \omicron + \pi + \varrho + \sigma).$$

Addirt man diese beiden Summen, so ist

$$(A_1 + C_1 + E_1)(B_1 + D_1 + F_1) = \alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \xi + \frac{1}{2}(\mu + \nu + \omicron + \pi + \varrho + \sigma);$$

$$A_1 + C_1 + E_1 \text{ und } B_1 + D_1 + F_1$$

in eine quadratische Gleichung zu finden.

Es sei ferner:

$$A_1 \cdot C_1 = \mu \cdot A_1 + \nu \cdot B_1 + \omicron \cdot C_1 + \pi \cdot D_1 + \varrho \cdot E_1 + \sigma \cdot F_1,$$

( $\mu, \nu, \sigma, \pi, \varrho, \sigma$  haben natürlich andere Bedeutung als vorher so folgt:

$$C_1.E_1 = \mu.C_1 + \nu.D_1 + \sigma.E_1 + \pi.F_1 + \varrho.A_1 + \sigma.B_1,$$

$$E_1.A_1 = \mu.E_1 + \nu.F_1 + \sigma.A_1 + \pi.B_1 + \varrho.C_1 + \sigma.D_1;$$

folglich ist:

$$\begin{aligned} A_1.C_1 + C_1.E_1 + E_1.A_1 &= (\mu + \sigma + \varrho)(A_1 + C_1 + E_1) \\ &\quad + (\nu + \pi + \sigma)(B_1 + D_1 + F_1), \end{aligned}$$

d. h. diese Summe ist durch bekannte Zahlen zu bestimmen. Das Gleiche gilt von  $B_1.D_1 + D_1.F_1 + F_1.B_1$ . Multiplicirt man drei Gleichungen der Reihe nach durch  $E_1, A_1, C_1$  und addirt so erhält man:

$$\begin{aligned} 3.A_1.C_1.E_1 &= \mu(A_1.E_1 + A_1.C_1 + C_1.E_1) + \nu(B_1.E_1 + A_1.D_1 + C_1.F_1) \\ &\quad + \sigma(C_1.E_1 + A_1.E_1 + C_1.A_1) + \pi(D_1.E_1 + A_1.F_1 + B_1.C_1) \\ &\quad + \varrho(E_1^2 + A_1^2 + C_1^2) + \sigma(E_1.F_1 + A_1.B_1 + C_1.D_1). \end{aligned}$$

Die Summen  $A_1.E_1 + A_1.C_1 + C_1.E_1$ , desgleichen  $B_1.E_1 + A_1.D_1 + C_1.F_1$ , desgleichen  $A_1^2 + C_1^2 + E_1^2$  kann man durch bekannte  $A_1, B_1, C_1$  u. s. w. unabhängige Grössen ausdrücken. Aus für  $A_1.B_1, B_1.C_1$  u. s. w. angenommenen Gleichungen folgt also

$$D_1.E_1 + A_1.F_1 + B_1.C_1 = (\alpha + \gamma + \varepsilon)(B_1 + D_1 + F_1) + (\beta + \delta + \xi)(A_1 + B_1 + C_1)$$

desgleichen:

$$A_1.B_1 + E_1.F_1 + C_1.D_1 = (\alpha + \gamma + \varepsilon)(A_1 + C_1 + E_1) + (\beta + \delta + \xi)(B_1 + D_1 + F_1)$$

d. h. das Produkt  $A_1.C_1.E_1$ , ebenso  $B_1.D_1.F_1$  lässt sich durch bekannte von  $A_1, B_1, C_1$  u. s. w. unabhängige Grössen ausdrücken; oder  $A_1, C_1, E_1$  wie  $B_1, D_1, F_1$  ergeben sich Wurzeln kubischer Gleichungen.

## §. 32.

Die 16 Perioden, welche die ungeraden Diagonalen des regulären 514-Ecks bilden, finden sich in §. 13. Mit  $A$  und  $w$  verschiedenen Zeigern bezeichne man die Coefficienten der Gleichung, deren Wurzeln die Glieder der ersten Periode sind  $x^8 + A_1.x^7 + A_2.x^6 + A_3.x^5 + A_4.x^4 + A_5.x^3 + A_6.x^2 + A_7.x + A_8 = 0$  habe die Wurzeln  $x_1, x_{255}, x_{253}, x_{249}, x_{241}, x_{235}, x_{193}, x_{191}, x_{187}, x_{185}, x_{183}, x_{181}, x_{179}, x_{177}, x_{175}, x_{173}$ .

Es sollen  $B, C, D, E, F, G, H, K, L, M, N, O, P, R$  an die Stelle von  $A$  treten bei den Gleichungen deren Wurzeln

Diagonalen der 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16ten Periode sind. Werden die Perioden nach dem Factor 3 untereinander geordnet, so folgen auf einander:  $A, K, B, L, C, M, D, E, O, F, P, G, R, H, T, A$ . Man bilde nach §. 27.  $A_1 \cdot B_1$  mit dem Zeiger 1 und den Zeigern von  $B_1$  und erhält:

$$A_1 \cdot B_1 + 2A_1 + C_1 + 2E_1 + F_1 + 2G_1 + H_1 + L_1 + 2M_1 + 2N_1 + P_1 + R_1 = 0.$$

Nach §. 31. erhält man hieraus sogleich die Werthe für  $A_1 \cdot L_1, B_1 \cdot C_1, L_1 \cdot M_1$  u. s. w.; es ergibt sich z. B.:

$$A_1 \cdot C_1 + 2B_1 + D_1 + 2F_1 + G_1 + 2H_1 + A_1 + M_1 + 2N_1 + 2O_1 + R_1 + T_1 = 0$$

u. s. w.,

$$A_1 \cdot L_1 + 2K_1 + M_1 + 2O_1 + P_1 + 2R_1 + T_1 + C_1 + 2D_1 + 2E_1 + G_1 + H_1 = 0,$$

$$A_1 \cdot M_1 + 2L_1 + N_1 + 2P_1 + R_1 + 2T_1 + K_1 + D_1 + 2E_1 + 2F_1 + H_1 + A_1 = 0$$

u. s. w.

Ferner suche man nach §. 27.  $A_1 \cdot C_1$ , und erhält:

$$A_1 \cdot C_1 + B_1 + 2D_1 + E_1 + F_1 + G_1 + 2K_1 + L_1 + M_1 + 2N_1 + O_1 + R_1 + 2T_1 = 0,$$

gleich nach §. 31.:

$$A_1 \cdot D_1 + C_1 + 2E_1 + F_1 + G_1 + H_1 + 2L_1 + M_1 + N_1 + 2O_1 + P_1 + T_1 + 2K_1 = 0 \text{ u. s. w.,}$$

gleich:

$$A_1 \cdot M_1 + L_1 + 2N_1 + O_1 + P_1 + R_1 + 2B_1 + C_1 + D_1 + 2E_1 + F_1 + H_1 + 2A_1 = 0,$$

$$A_1 \cdot N_1 + M_1 + 2O_1 + P_1 + R_1 + T_1 + 2C_1 + D_1 + E_1 + 2F_1 + G_1 + A_1 + 2B_1 = 0 \text{ u. s. w.}$$

Ferner suche man nach §. 27.:

$$A_1 \cdot D_1 + 2C_1 + E_1 + F_1 + G_1 + 2H_1 + L_1 + 2N_1 + O_1 + P_1 + R_1 + 3T_1 = 0,$$

gleich:

$$A_1 \cdot E_1 + 2D_1 + F_1 + G_1 + H_1 + 2A_1 + M_1 + 2O_1 + P_1 + R_1 + T_1 + 3K_1 = 0$$

u. s. w., desgleichen:

$$A_1 \cdot N_1 + 2M_1 + O_1 + P_1 + R_1 + 2T_1 + C_1 + 2E_1 + F_1 + G_1 + H_1 + 3A_1 = 0,$$

$$A_1 \cdot O_1 + 2N_1 + P_1 + R_1 + T_1 + 2K_1 + D_1 + 2F_1 + G_1 + H_1 + A_1 + 3B_1 = 0$$

u. s. w.

Ebenso findet sich:

$$A_1 \cdot E_1 + 2A_1 + 2B_1 + C_1 + D_1 + 2E_1 + 2F_1 + G_1 + H_1 + 2M_1 + 2R_1 =$$

folglich:

$$B_1 \cdot F_1 + 2B_1 + 2C_1 + D_1 + E_1 + 2F_1 + 2G_1 + H_1 + A_1 + 2N_1 + 2T_1 =$$

u. s. w., desgleichen:

$$K_1 \cdot O_1 + 2K_1 + 2L_1 + M_1 + N_1 + 2O_1 + 2P_1 + R_1 + T_1 + 2D_1 + 2H_1 =$$

$$L_1 \cdot P_1 + 2L_1 + 2M_1 + N_1 + O_1 + 2P_1 + 2R_1 + T_1 + K_1 + 2E_1 + 2A_1 =$$

u. s. w.

Sucht man nach §. 24.  $A_2$ , so ergeben sich  $B_2$ ,  $C_2$ ,  $D_2$  nach §. 31.; man erhält:

$$A_2 + A_1 + B_1 + E_1 + 2K_1 + M_1 + N_1 = 0,$$

$$B_2 + B_1 + C_1 + F_1 + 2L_1 + N_1 + O_1 = 0 \text{ u. s. w.,}$$

$$K_2 + K_1 + L_1 + O_1 + 2B_1 + D_1 + E_1 = 0;$$

$$L_2 + L_1 + M_1 + P_1 + 2C_1 + E_1 + F_1 = 0 \text{ u. s. w.}$$

Die Gleichung des regulären 514-Ecks, die vom 128 Grade ist, zerlege man zunächst in zwei Gleichungen, deren eine die in den Perioden I.—VIII., die andere die in den Perioden IX.—XVI. enthaltenen Diagonalen zu Wurzeln hat. Da nach §  $A_2 = \frac{1}{2}(A_1^2 + A_1 - 16)$ ,  $B_2 = \frac{1}{2}(B_1^2 + B_1 - 16)$  u. s. w. ist, so giebt sich aus der letzten Reihe der vorher entwickelten Gleichungen:

$$\begin{aligned} & A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 + D_1^2 + E_1^2 + F_1^2 + G_1^2 + H_1^2 \\ &= -7(A_1 + B_1 + C_1 + D_1 + E_1 + F_1 + G_1 + H_1) \\ &\quad -8(K_1 + L_1 + M_1 + N_1 + O_1 + P_1 + R_1 + T_1) + 128 \\ &= -(K_1 + L_1 + M_1 + N_1 + O_1 + P_1 + R_1 + T_1) + 121. \end{aligned}$$

Da man aus den vorhergehenden Gleichungen das Produkt zweier der Grössen  $A_1$ ,  $B_1$  ...  $H_1$  bestimmen kann, so findet man:

$$\begin{aligned} & (A_1 + B_1 + C_1 + D_1 + E_1 + F_1 + G_1 + H_1)^2 \\ &= 65 - (K_1 + L_1 + M_1 + N_1 + O_1 + P_1 + R_1 + T_1) \\ &= 64 + (A_1 + B_1 + C_1 + D_1 + E_1 + F_1 + G_1 + H_1), \end{aligned}$$

oder es ist:

$$A_1 + B_1 + C_1 + D_1 + E_1 + F_1 + G_1 + H_1 = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{257});$$

bachtet man die Vorzeichen der Wurzeln, die in vorübergehender Summe enthalten sind, so ist:

(A)

$$A_1 + B_1 + C_1 + D_1 + E_1 + F_1 + G_1 + H_1 = \frac{1}{4}(1 - \sqrt{257});$$

$$K_1 + L_1 + M_1 + N_1 + O_1 + P_1 + R_1 + T_1 = \frac{1}{4}(1 + \sqrt{257}).$$

Aus

$$(A_1 + C_1 + E_1 + G_1) + (B_1 + D_1 + F_1 + H_1) = \frac{1}{4}(1 - \sqrt{257})$$

und

$$(A_1 + C_1 + E_1 + G_1)(B_1 + D_1 + F_1 + H_1) = -16,$$

da die letztere Gleichung sich aus den früher entwickelten Gleichungen ergibt, folgt:

(B)

$$A_1 + C_1 + E_1 + G_1 = \frac{1}{4}(1 - \sqrt{257} - \sqrt{514 - 2\sqrt{257}});$$

$$B_1 + D_1 + F_1 + H_1 = \frac{1}{4}(1 - \sqrt{257} + \sqrt{514 - 2\sqrt{257}}).$$

Auf gleichem Wege ergibt sich:

(C)

$$K_1 + M_1 + O_1 + R_1 = \frac{1}{4}(1 + \sqrt{257} - \sqrt{514 + 2\sqrt{257}});$$

$$L_1 + N_1 + P_1 + T_1 = \frac{1}{4}(1 + \sqrt{257} + \sqrt{514 + 2\sqrt{257}}).$$

Aus

$$(A_1 + B_1 + E_1 + F_1) + (C_1 + D_1 + G_1 + H_1) = \frac{1}{4}(1 - \sqrt{257})$$

und

$$\begin{aligned} & (A_1 + B_1 + E_1 + F_1) \cdot (C_1 + D_1 + G_1 + H_1) \\ &= -12 - 4(B_1 + D_1 + F_1 + H_1) - 4(K_1 + M_1 + O_1 + R_1) \\ & \quad - 8(L_1 + N_1 + P_1 + T_1) \\ &= -16 - 2(\sqrt{257} - \sqrt{514 + 2\sqrt{257}} - \sqrt{514 - 2\sqrt{257}}) \end{aligned}$$

folgt:

(D)

$$A_1 + B_1 + E_1 + F_1$$

$$= \frac{1 - \sqrt{257} - \sqrt{514 + 30\sqrt{257} + 16\sqrt{514 + 2\sqrt{257}} + 16\sqrt{514 - 2\sqrt{257}}}}{4},$$

$$C_1 + D_1 + G_1 + H_1$$

$$= \frac{1 - \sqrt{257} + \sqrt{514 + 30\sqrt{257} + 16\sqrt{514 + 2\sqrt{257}} + 16\sqrt{514 - 2\sqrt{257}}}}{4}.$$

Aus

$$(A_1 + D_1 + E_1 + H_1) + (B_1 + C_1 + F_1 + G_1) = \frac{1}{4}(1 - \sqrt{257})$$

und

$$\begin{aligned} & (A_1 + D_1 + E_1 + H_1) \cdot (B_1 + C_1 + F_1 + G_1) \\ &= -12 - 4(A_1 + C_1 + E_1 + G_1) - 4(L_1 + N_1 + P_1 + T_1) \\ & \quad - 8(K_1 + M_1 + O_1 + R_1) \\ &= -16 - 2\sqrt{257} + \sqrt{514 + 2\sqrt{257}} + \sqrt{514 - 2\sqrt{257}} \end{aligned}$$

folgt:

(E)

$$A_1 + D_1 + E_1 + H_1$$

$$= \frac{1}{4}(1 - \sqrt{257} - \sqrt{514 + 30\sqrt{257} - 16\sqrt{514 + 2\sqrt{257}} - 16\sqrt{514 - 2\sqrt{257}}}),$$

$$B_1 + C_1 + F_1 + G_1$$

$$= \frac{1}{4}(1 - \sqrt{257} + \sqrt{514 + 30\sqrt{257} - 16\sqrt{514 + 2\sqrt{257}} - 16\sqrt{514 - 2\sqrt{257}}}),$$

Aus den Gleichungen *B.D.E* ergibt sich:

(F)

$$\begin{aligned} A_1 + E_1 &= \frac{1}{8}(1 - \sqrt{257} - \sqrt{514 - 2\sqrt{257}} \\ & \quad - 2\sqrt{257 + 15\sqrt{257} + \sqrt{226 \cdot 257 + 3614\sqrt{257}}}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_1 + G_1 &= \frac{1}{8}(1 - \sqrt{257} - \sqrt{514 - 2\sqrt{257}} \\ & \quad + 2\sqrt{257 + 15\sqrt{257} + \sqrt{226 \cdot 257 + 3614\sqrt{257}}}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_1 + F_1 &= \frac{1}{8}(1 - \sqrt{257} + \sqrt{514 - 2\sqrt{257}} \\ & \quad - 2\sqrt{257 + 15\sqrt{257} - \sqrt{226 \cdot 257 + 3614\sqrt{257}}}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_1 + H_1 &= \frac{1}{8}(1 - \sqrt{257} + \sqrt{514 - 2\sqrt{257}} \\ & \quad + 2\sqrt{257 + 15\sqrt{257} - \sqrt{226 \cdot 257 + 3614\sqrt{257}}}). \end{aligned}$$

Auf gleiche Weise ergibt sich:

(G)

$$\begin{aligned} K_1 + O_1 &= \frac{1}{8}(1 + \sqrt{257} - \sqrt{514 + 2\sqrt{257}} \\ & \quad + 2\sqrt{257 - 15\sqrt{257} - \sqrt{226 \cdot 257 - 3614\sqrt{257}}}), \end{aligned}$$

$$L_1 + P_1 = \frac{1}{8}(1 + \sqrt{257} + \sqrt{514 + 2\sqrt{257}} \\ + 2\sqrt{257 - 15\sqrt{257} + \sqrt{226 \cdot 257 - 3614\sqrt{257}}}),$$

$$M_1 + R_1 = \frac{1}{8}(1 + \sqrt{257} - \sqrt{514 + 2\sqrt{257}} \\ - 2\sqrt{257 - 15\sqrt{257} - \sqrt{226 \cdot 257 - 3614\sqrt{257}}}),$$

$$N_1 + T_1 = \frac{1}{8}(1 + \sqrt{257} + \sqrt{514 + 2\sqrt{257}} \\ - 2\sqrt{257 - 15\sqrt{257} + \sqrt{226 \cdot 257 - 3614\sqrt{257}}}).$$

Führt man folgende Bezeichnungen ein:

$$A = \sqrt{514 - 2\sqrt{257}}; B = \sqrt{514 + 2\sqrt{257}}; D = 257 + 15\sqrt{257};$$

$$E = 257 - 15\sqrt{257}; F = \sqrt{226 \cdot 257 + 3614\sqrt{257}};$$

$$H = \sqrt{226 \cdot 257 - 3614\sqrt{257}},$$

so kann man statt  $F, G$  setzen:

(H)

$$A_1 + E_1 = \frac{1}{8}(1 - \sqrt{257} - A - 2\sqrt{D + F}); K_1 + O_1 = \frac{1}{8}(1 + \sqrt{257} - B + 2\sqrt{E - H})$$

$$B_1 + F_1 = \frac{1}{8}(1 - \sqrt{257} + A - 2\sqrt{D - F}); L_1 + P_1 = \frac{1}{8}(1 + \sqrt{257} + B + 2\sqrt{E + H})$$

$$C_1 + G_1 = \frac{1}{8}(1 - \sqrt{257} - A + 2\sqrt{D + F}); M_1 + R_1 = \frac{1}{8}(1 + \sqrt{257} - B - 2\sqrt{E - H})$$

$$D_1 + H_1 = \frac{1}{8}(1 - \sqrt{257} + A + 2\sqrt{D - F}); N_1 + T_1 = \frac{1}{8}(1 + \sqrt{257} + B - 2\sqrt{E + H})$$

Aus den Werthen von  $A_1^2, E_1^2$  (die sich aus  $A_2, E_2$  ergeben) und  $A_1 \cdot E_1$  findet man:

$$(A_1 - E_1)^2 = -(A_1 + E_1) + 2(B_1 + F_1) + 2(C_1 + G_1) + 2(D_1 + H_1) \\ + 2(M_1 + R_1) - 2(N_1 + T_1) - 4(O_1 + K_1) + 32,$$

und da  $A_1$  absolut genommen  $> E_1$  aber negativ ist, so ergibt sich:



(K)

$$A_1 - E_1 = -\frac{1}{4} \sqrt{514 - 18\sqrt{257} + 6A + 12\sqrt{D+F} - 24\sqrt{E-H} + 8\sqrt{E+H}},$$

desgleichen:

$$B_1 - F_1 = -\frac{1}{4} \sqrt{514 - 18\sqrt{257} - 6A + 12\sqrt{D-F} - 8\sqrt{E-H} - 24\sqrt{E+H}},$$

$$C_1 - G_1 = -\frac{1}{4} \sqrt{514 - 18\sqrt{257} + 6A - 12\sqrt{D+F} + 24\sqrt{E-H} - 8\sqrt{E+H}},$$

$$D_1 - H_1 = +\frac{1}{4} \sqrt{514 - 18\sqrt{257} - 6A - 12\sqrt{D-F} + 8\sqrt{E-H} + 24\sqrt{E+H}},$$

$$K_1 - O_1 = -\frac{1}{4} \sqrt{514 + 18\sqrt{257} + 6B + 24\sqrt{D-F} + 8\sqrt{D+F} - 12\sqrt{E-H}},$$

$$L_1 - P_1 = -\frac{1}{4} \sqrt{514 + 18\sqrt{257} - 6B + 8\sqrt{D-F} - 24\sqrt{D+F} - 12\sqrt{E+H}},$$

$$M_1 - R_1 = -\frac{1}{4} \sqrt{514 + 18\sqrt{257} + 6B - 24\sqrt{D-F} - 8\sqrt{D+F} + 12\sqrt{E-H}},$$

$$N_1 - T_1 = -\frac{1}{4} \sqrt{514 + 18\sqrt{257} - 6B - 8\sqrt{D-F} + 24\sqrt{D+F} + 12\sqrt{E+H}}.$$

Durch die Gleichungen (H) und (K) sind  $A_1, B_1, C_1, \dots$  bestimmt.

Man zerlege die erste und fünfte Gleichung in zwei Gleichungen vierten Grades; es enthalte

$$x^4 + \mathfrak{A}_1 x^3 + \mathfrak{A}_2 x^2 + \mathfrak{A}_3 x + \mathfrak{A}_4 = 0 \text{ die Diag. } 1, 253, 241, 193,$$

$$x^4 + \alpha_1 x^3 + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x + \alpha_4 = 0 \quad ,, \quad ,, \quad 255, 249, 225, 129,$$

$$x^4 + \mathfrak{E}_1 x^3 + \mathfrak{E}_2 x^2 + \mathfrak{E}_3 x + \mathfrak{E}_4 = 0 \quad ,, \quad ,, \quad 15, 197, 17, 189,$$

$$x^4 + \epsilon_1 x^3 + \epsilon_2 x^2 + \epsilon_3 x + \epsilon_4 = 0 \quad ,, \quad ,, \quad 227, 137, 223, 121$$

als Wurzeln. Aus den Zeigern der Wurzeln findet man:  $\mathfrak{A}_1 \cdot \mathfrak{A}_4 = -(A_1 + B_1 + K_1 + M_1)$ ;  $\mathfrak{E}_1 \cdot \epsilon_1 = -(E_1 + F_1 + R_1 + O_1)$ , und da  $\mathfrak{A}_1 + \alpha_1 = A_1$ ;  $\mathfrak{E}_1 + \epsilon_1 = E_1$  sind, so sind  $\mathfrak{A}_1, \alpha_1, \mathfrak{E}_1, \epsilon_1$  als gefunden anzusehen. Durch die Gleichungen des §. 17. sind nun aber auch  $\mathfrak{A}_2, \alpha_2, \dots$  zu bestimmen. Endlich bestimme man die Gleichungen:

$$x^2 + a_{1,1} x + a_{2,1} = 0(x_1, x_{241}); \quad x^2 + a_{1,2} x + a_{2,2} = 0(x_{255}, x_{225});$$

$$x^2 + a_{1,3} x + a_{2,3} = 0(x_{253}, x_{193}); \quad x^2 + a_{1,4} x + a_{2,4} = 0(x_{249}, x_{129});$$

$$x^2 + e_{1,1} x + e_{2,1} = 0(x_{15}, x_{17}); \quad x^2 + e_{1,2} x + e_{2,2} = 0(x_{227}, x_{223});$$

$$x^2 + e_{1,3} x + e_{2,3} = 0(x_{197}, x_{189}); \quad x^2 + e_{1,4} x + e_{2,4} = 0(x_{187}, x_{121});$$



suchenden Gleichungen, so sind die Produkte aus je zweien dieser Grössen stets gleich einer Grösse von der Form  $\alpha.a + \beta.b + \gamma.c + \delta.d$  worin  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  ... positive oder negative ganze Zahlen sind. — Entbält jede der so erhaltenen Gleichungen wieder eine durch 2 oder 3 oder 5 .... theilbare Anzahl von Wurzeln, so lässt sich jede der neuen Gleichungen wieder in 2 oder 3 oder 5 .... Gleichungen zerlegen u. s. w. — Bilden die  $n$  ungeraden Diagonalen mehrere Perioden, so hat jede Periode dieselbe Anzahl von Gliedern und lässt sich die Gleichung des Vielecks, je nachdem die Diagonalen 2, 3, 4, 5, .... Perioden bilden in 2, 3, 4, 5, .... Gleichungen zerlegen, deren jede die Glieder einer Periode zu Wurzeln hat. Bei zwei Perioden hängt die Zerlegung von einer Gleichung zweiten, bei drei Perioden von einer Gleichung dritten, bei vier Perioden von zwei Gleichungen zweiten, bei sechs Perioden von einer Gleichung zweiten und einer Gleichung dritten Grades ab. Ist die Zahl der Glieder einer Periode durch 2, 3, 4, 5, .... theilbar, so kann man jede der neuen Gleichungen wieder in 2, 3, 4, 5, .... Gleichungen zerlegen, deren jede ganz bestimmte Diagonalen des Vielecks zu Wurzeln hat u. s. w.

Ob und in wie weit es dem Verfasser gelungen ist, im Vorhergehenden einzelne Theile des Gauss'schen Satzes über reguläre Vielecke auf elementare Weise zu beweisen, muss er der Beurtheilung Anderer überlassen. Dem Verfasser kam es übrigens weniger darauf an, einzelne Stücke dieses Satzes zu erweisen (bei einer Verallgemeinerung der angewendeten Beweisführung dürfte sich der ganze Satz ergeben), als eine Methode anzugeben, durch welche es möglich wird, auch einem mit der Zahlentheorie nicht Vertrauten zu zeigen, von welchen Beziehungen und Rechnungen die Zerlegung der Gleichungen, also in einzelnen Fällen die Construirbarkeit der betreffenden Vielecke abhängig ist. —

## XXIV.

### Bestimmung des kürzesten Abstandes zweier im Raume gelegener nicht paralleler Geraden.

Von

Herrn Professor *C. A. Bretschneider*  
am Gymnasium zu Gotha.

---

Die ausführlicheren Lehrbücher der Geometrie enthalten gewöhnlich die Auflösung der Aufgabe, den senkrechten Abstand zweier im Raume liegender, nicht paralleler, Geraden zu finden, zeigen aber nicht, wie der Zahlwerth dieses Abstandes gefunden werden könne, für welchen immer auf die Hülfsmittel der analytischen Geometrie verwiesen wird. Legendre in seiner Geometrie (S. 378 der Crelle'schen Uebersetzung) giebt zwar einen ziemlich einfachen Ausdruck für diesen Zahlwerth, verwendet aber zu dessen Herleitung doch Vorstellungen, welche der synthetischen Geometrie fremd sind. Das nachfolgende einfache Verfahren zur Lösung der vorgelegten Aufgabe dürfte daher für den Elementarunterricht vielleicht nicht ohne Werth sein.

Sind  $AB$  und  $CD$  (Taf. IX. Fig. 16.) zwei im Raume gelegene Gerade, welche einander nicht parallel laufen, so fälle man aus einem beliebigen Punkte  $J$  der Geraden  $AB$  ein Loth  $JK=a$  auf  $CD$ , aus dem Fusspunkte  $K$  desselben ein zweites Loth  $KL=b$  auf  $AB$ , und aus dem Fusspunkte  $L$  wiederum ein drittes Loth  $LM=c$  auf die  $CD$ . Dann erhält man für das Quadrat des kleinsten Abstandes  $\delta$  beider Geraden den Werth:

$$\delta^2 = \frac{a^2c^2 - b^4}{a^2 - 2b^2 + c^2} = GH^2.$$

Für den Werth der Entfernungen  $JG$  und  $KH$  der beiden

Endpunkte des ersten Lothes von den betreffenden Endpunkten der auf beiden Geraden senkrecht stehenden Strecke  $GH$  ergibt sich:

$$JG = \frac{a^2 - b^2}{a^2 - 2b^2 + c^2} \sqrt{a^2 - b^2}, \quad KH = \frac{a^2 - b^2}{a^2 - 2b^2 + c^2} \sqrt{b^2 - c^2}.$$

Ist endlich  $\omega$  der spitze Winkel, den beide Gerade  $AB$  und  $CD$  zusammen bilden, so wird

$$\sin \omega = \sqrt{\frac{a^2 - 2b^2 + c^2}{a^2 - b^2}}, \quad \cos \omega = \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - b^2}}$$

gefunden. Fällt man von  $M$  aus  $MN = d$  senkrecht auf  $AB$ , von  $N$  aus wiederum  $NO = e$  senkrecht auf  $CD$  u. s. f., so nähern sich diese Lothe rasch dem Werthe  $\delta$ , und hängen durch folgende Gleichungen unter einander zusammen:

$$\begin{aligned} \frac{b^2 - c^2}{a^2 - b^2} &= \frac{c^2 - d^2}{b^2 - c^2} = \frac{d^2 - e^2}{c^2 - d^2} = \frac{e^2 - f^2}{d^2 - e^2} = \text{u. s. w.} \\ &= \frac{b^2 - d^2}{a^2 - c^2} = \frac{b^2 - e^2}{a^2 - d^2} = \frac{b^2 - f^2}{a^2 - e^2} = \text{u. s. w.} \end{aligned}$$

Es bilden daher die Differenzen  $a^2 - b^2$ ,  $b^2 - c^2$ ,  $c^2 - d^2$ , u. s. w. eine fallende geometrische Progression.

Der Beweis dieser Ausdrücke wird höchst einfach dadurch geführt, dass man durch die  $AB$  eine Ebene  $XY$  parallel zu  $CD$ , sodann durch  $CD$  eine zweite Ebene legt, welche auf  $XY$  senkrecht steht und letztere in der Geraden  $EF$  schneidet. Zieht man dann von den Punkten  $K$  und  $M$  aus die Geraden  $KP$  und  $MQ$  senkrecht auf  $EF$ , so ist  $JL^2 = a^2 - b^2$ ,  $KM^2 = PQ^2 = b^2 - c^2$ , woraus dann das Uebrige ohne alle Weitläufigkeit gefunden werden kann.

# XXV.

eiben des Herrn Professor Dr. Ligowski  
in Berlin  
an den Herausgeber.

---

h die Lösungen der Aufgabe, Band 45. des Archivs,  
, bin ich veranlasst worden, ebenfalls eine Lösung zu  
h.

iecke, in welchen  $a, b, c, r, \varrho$  und  $F$  rationale  
sind.

den gebräuchlichen Bezeichnungen ist:

$$F = \sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)} = \varrho \cdot S,$$

:

$$(S-a)(S-b)(S-c) = \varrho^2 S.$$

man:

$$\begin{aligned} S-a &= \varrho x, \\ S-b &= \varrho y, \\ S-c &= \varrho z; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S &= \varrho(x+y+z) \\ &= a + \varrho x, \\ &= b + \varrho y, \\ &= c + \varrho z. \end{aligned}$$

3) und 4) wird aus 2):

$$\begin{aligned} xyz &= x + y + z \\ &= \frac{a}{\varrho} + x \\ &= \frac{b}{\varrho} + y \\ &= \frac{c}{\varrho} + z. \end{aligned}$$

Mithin ist auch:

$$\frac{a}{\varrho} = y + z,$$

$$\frac{b}{\varrho} = x + z,$$

$$\frac{c}{\varrho} = x + y;$$

d. h.:

$$6) \dots \dots \dots a:b:c = (y+z):(x+z):(x+y).$$

Aus 5) ergibt sich:

$$7) \dots \dots \dots z = \frac{x+y}{xy-1}.$$

Diesen Werth von  $z$  in 6) eingesetzt ergibt:

$$8) \dots \dots a:b:c = x(y^2+1):y(x^2+1):(x+y)(xy-1).$$

Setzt man:

$$9) \dots \dots \dots a = x(y^2+1),$$

dann ist:

$$10) \dots \dots \dots b = y(x^2+1),$$

$$11) \dots \dots \dots c = (x+y)(xy-1).$$

Hieraus ergibt sich nach der Formel 1):

$$12) \dots \dots \dots F = xy(x+y)(xy-1).$$

Ferner ist:

$$13) \dots \dots \dots \varrho = xy-1,$$

$$14) \dots \dots \dots r = \frac{1}{4}(x^2+1)(y^2+1),$$

$$15) \dots \dots \dots \sin \alpha = \frac{2x}{x^2+1},$$

$$16) \dots \dots \dots \sin \beta = \frac{2y}{y^2+1},$$

$$17) \dots \dots \dots \sin \gamma = \frac{2(x+y)(xy-1)}{(x^2+1)(y^2+1)}.$$

Für  $x = 4$  und  $y = 3$  erhält man:

$$a = 40, \quad b = 51, \quad c = 77;$$

$$F = 924, \quad \varrho = 11, \quad r = 42,5;$$

$$\sin \alpha = \frac{8}{17}, \quad \sin \beta = \frac{3}{5}, \quad \sin \gamma = \frac{77}{85}.$$


---





Eifer und Fleiss, mit welchem Skřivan sich seinem Berufe widmete, fand bald Anerkennung. Er wurde im Jahre 1856 Lehrer an der Communal-Oberrealschule in Wien, und, nachdem er im Jahre 1858 das Staatsexamen für Oberreallehrer mit bestem Erfolge bestanden, wurde ihm in demselben Jahre die Direction der Oberrealschule am Bauernmarkte in Wien anvertraut, welcher Schule er in kurzer Zeit durch Heranziehung ausgezeichnete Lehrkräfte, sowie durch sein eigenes Wirken, einen sehr guten Ruf erwarb. Sein Streben war jedoch immer eine Lehrkanzel an einer Hochschule, namentlich in seinem Vaterlande Böhmen zu erhalten, und er verwendete seine ganze Musse auf mathematische Studien. Aus dieser Zeit datirt sein Buch: *Die Grundlehren der Zahlentheorie* 1862, sowie einige kleinere Aufsätze. Als mit Schluss des Jahres 1862, um die Reorganisation des Landespolytechnikums in Prag anzubahnen, eine zweite Lehrkanzel für Mathematik und zwar mit böhmischer Unterrichtssprache daselbst errichtet wurde, schlug der Lehrkörper Gustav Skřivan als den würdigsten vor. Er erhielt diese Stelle wirklich, übersiedelte nach Prag, und gab sich nun ganz mit gewohntem Eifer seinem neuen Berufe hin. Er machte sich vor Allen an's Werk, dem nunmehr auftretenden Bedürfniss der böhmischen Studirenden nach guten mathematischen Lehrbüchern Rechnung zu tragen, und es erschienen von ihm im Jahre 1864 ein Lehrbuch der analytischen Geometrie, und im Jahre 1865 seine Vorlesungen über algebraische Analysis, beide in böhmischer Sprache, ausserdem kleinere Aufsätze in diesem Archive, sowie in der böhmischen Zeitschrift: *Krok*. Ausserdem nahm er grossen Antheil an der Durchführung der Reform der polytechnischen Schule, welcher er nun angehörte. Sein Körper war jedoch den vielfachen Anstrengungen nicht gewachsen, namentlich schadeten ihm die nächtlichen Arbeiten, und er musste im letzten Jahre zu wiederholten Malen längere Zeit wegen obwohl nicht bedenklichen Unwohlseins seine Vorträge unterbrechen. Im November 1865 begann er an einem Lehrbuch der Differenzialrechnung zu arbeiten, in welcher Arbeit ihn ein heftiger Blutsturz unterbrach, der ihn aufs Krankenlager warf, von welchem er zur tiefsten Betrübniß seiner zahlreichen Schüler und Freunde leider nicht mehr aufstand. Die königl. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften wählte Skřivan zu ihrem ausserord. Mitgliede, und der Lehrkörper der polytechnischen Schule wählte ihn bei der ersten Wahl der Functionäre zum Vorstande der Ingenieur-Abtheilung.

K.



und meisterhafte Darstellung einen wesentlichen Antheil haben. Neben dem mathematischen und naturwissenschaftlichen Interesse, welches das Werk vorzugsweise in Anspruch nimmt, bietet dasselbe aber auch ein weiteres und allgemeineres Interesse für die neuere Geschichte der Wissenschaften in Belgien überhaupt dar, indem in demselben auch noch viele andere Gelehrte, die auf anderen wissenschaftlichen Gebieten sich verdient und berühmt gemacht haben, wie z. B. der Dichter Baron von Stassart, der Philologe und Archäologe Baron von Reiffenberg, u. s. w. charakterisirt werden, in einer Weise, die auch das Interesse jedes Mathematikers u. s. w., der zugleich ausserhalb seines engeren wissenschaftlichen Gebietes auf anderen Feldern sich umzusehen gewohnt ist, in Anspruch zu nehmen in hohem Grade geeignet ist; ja selbst für die Geschichte des Vaterlandes des geehrten Herrn Verfassers überhaupt scheint uns das sehr schöne Werk wegen mancher in demselben vorkommenden historischen Excurse keineswegs ohne Bedeutung zu sein.

Wir schliessen mit einer Uebersicht des Inhalts des in so vielen Beziehungen so sehr zu beachtenden Werkes: **Livre Premier. État général des sciences**, p. 1—96. Wir können uns nicht versagen, den Herrn Verfasser über das, was er in diesem ersten Buche bezweckt hat, selbst sprechen zu lassen; er sagt darüber in der Vorrede, p. II.: „Dans le premier livre, j'appelle l'attention sur un sujet qui ne paraît pas avoir été suffisamment étudié. Par suite de l'avancement des sciences, il devient facile aujourd'hui de s'entendre avec d'autres savants et de concerter ensemble ses recherches pour élucider un même point scientifique, contre lequel venait échouer autrefois toute la capacité d'un seul homme, quelle que fût son ardeur au travail: je citerai, par exemple, les perturbations simultanées du magnétisme sur les différents points du globe et leur mode d'action dans un instant donné. Il faut évidemment substituer à un seul observateur, quel que soit son mérite, une réunion d'observateurs actifs, répandus sur les différentes parties du globe, qui, avec toute l'attention possible, constatent les mêmes faits d'après les mêmes méthodes et avec les mêmes instruments. Notre Belgique, si ralentie dans sa marche, par plusieurs causes indépendantes d'elle, a été l'une des nations qui est entrée avec le plus d'ardeur dans cette voie. J'ai tâché de faire comprendre ensuite quels ont été les principaux travaux exécutés dans ce pays, soit individuellement, soit collectivement et en dirigeant l'attention de plusieurs savants à la fois vers une difficulté qu'il s'agissait d'étudier et de surmonter.“ Der Herr Verfasser, der bekanntlich



Bilt. — Le baron de Keverberg de Kessel. p. 559.—p. 744. Mögen sich in diesem vierten Buche unsere Leser die Lebensbeschreibungen der Mathematiker und Physiker Arago. p. 559.—591. — Humboldt. p. 592.—p. 607. — Bouvard. p. 608. — p. 628. — Schumacher. p. 629.—p. 642. — Gauss. p. 643.—p. 655. ganz besonders empfohlen sein lassen.

Wir zweifeln nicht, dass dem trefflichen und höchst interessanten, auch äusserlich sehr schön ausgestatteten Buche, für dessen Herausgabe dem Herrn Verfasser der grösste Dank gebührt, die so sehr verdiente Beachtung bald in den weitesten Kreisen zu Theil werden wird.

## A r i t h m e t i k.

Trattato di Algebra Superiore di Giovanni Novi, Professore di Algebra Superiore nella R. Università di Pisa. Parte prima. Analisi algebrica. Firenze. Felice le Monnier. 1863. 8<sup>o</sup>.

Leider ist es uns erst jetzt möglich gewesen, uns auf dem Wege des Buchhandels in den Besitz dieses Werkes zu setzen, und die Beziehungen und Verbindungen zwischen dem deutschen und italienischen Buchhandel müssen in der That noch sehr unvollkommen sein, wenn — wie es im vorliegenden Falle uns begegnet ist — in Deutschland fast Jahre lange Bemühungen nöthig sind, um sich in den Besitz eines italienischen Werkes zu setzen; je wichtiger aber jetzt gerade auch in den mathematischen Wissenschaften die sorgfältigste Berücksichtigung und genaueste Kenntnissnahme von den Bestrebungen und Arbeiten so vieler trefflichen italienischen Gelehrten auf dem genannten wissenschaftlichen Gebiete ist: desto erfreulicher ist es, in der neuesten Zeit mit Sicherheit hoffen zu dürfen, dass auch in dem erwähnten Missstande bald eine nachhaltige Besserung eintreten werde.

Das vorliegende Werk hat uns so vieles Interesse eingeflösst, dass wir, wenn auch seit seinem Erscheinen bereits drei Jahre verflossen sind, eine ausführlichere Anzeige desselben noch für nöthig halten. Der uns jetzt vorliegende erste Theil enthält unter dem Namen: „Analisi algebrica“ — um es kurz zu sagen — die allgemeine Lehre von den Functionen und die Theorie der Reihen. Ob ein zweiter Theil erschienen ist, vermögen wir nicht zu sagen, weil es uns bis jetzt nur möglich gewesen ist, in den Besitz des ersten Theils zu gelangen. Es lässt sich aber mit





















was wir um so mehr beklagen, weil dasselbe Necrologe von Baumgartner, Bond und Encke enthält. Vielleicht dürfen wir uns einer späteren Zusendung dieses uns sehr interessanten Heftes erfreuen.

1866. I. Heft IV. Wir machen dringend aufmerksam auf den Aufsatz: Nägeli: Ueber die Theorie der Capillarität. S. 597. — S. 627.

1866. II. Heft I. Enthält in den Kreis des Archivs gehörende Aufsätze nicht.

#### B e r i c h t i g u n g e n .

Thl. XLV. S. 238. Z. 11 v. u. am Ende dieser Zeile ist das ausgelassene Wort „nenne“ beizufügen.

Thl. XLV. Hft. 4. S. 387. Z. 5. v. u. ist statt „142° C.“ zu setzen: „—142°

quant ainsy serait, je  
elle soit, vous nignorez  
moy. Je l'attens donc  
r. Adieu.“

„Charles.“

...rte sich lebhaft für die Qua-  
...re muss man a. a. O. in den  
...ren Ad. Quetelet und Gachard  
...ch bemerken müssen, dass Herr  
...ich der Echtheit dieser Briefe erhebt,  
...eite von Herrn Ad. Quetelet mit sehr  
...interessanten Ausführung vertheidigt wird.

## A r i t h m e t i k.

### Ihr wichtige literarische Nachricht.

Herr Bierens de Haan an der Universität zu  
die Güte gehabt, uns die interessante und wichtige  
geben, dass von seinen Tafeln der bestimmten  
durch welche er der Wissenschaft, namentlich der  
nung und deren allseitigster Anwendung, einen so  
utzen gebracht hat, in kurzer Zeit eine neue Ausgabe  
n wird, auf die wir unsere Leser durch die Mittheilung  
entlichen Inhalts der folgenden, von dem Herrn Verfasser  
mit besonderer Güte uns gegebenen vorläufigen Nachricht  
sten aufmerksam machen können. Wir sehen diesen neuen  
, die jedenfalls wie die älteren auch unter den besonderen  
sien der Königlich niederländischen Akademie der  
enschaften publicirt werden, mit dem grössten Verlangen  
en, und sprechen, so wie dem Herrn Verfasser selbst, auch  
rher genannten gelehrten Körperschaft, für die Publication  
neuen wichtigen Werkes schon jetzt unseren wärmsten  
aus.

G.

Die zweite Auflage meiner „Tafeln der bestimmten  
rale“ \*) — (schreibt uns der Herr Verfasser) — wird hof-  
bald unter dem Titel:

\*) s. die ausführliche Anzeige Literar. Ber. Nr. CXXVI. S. 31  
f.).



„Nouvelles Tables d'Intégrales Définies“ erscheinen. Ich glaube diese zweite Auflage mit Recht „Neue Tafeln“ nennen zu dürfen. Denn unter etwa 8200 Formeln kommen nur ungefähr 50% aus den älteren Tafeln vor; 20% sind in meinen „Exposé de la théorie etc. des Intégrales définies (Abh. der K. Akademie der Wiss. Amsterdam, Bd. VIII.)“<sup>\*)</sup> abgeleitet, und die übrigen 30% finden sich in mehreren anderen Abhandlungen und Arbeiten von mir. Ungeachtet der jetzigen sehr grossen Anzahl von Integralen nehmen doch die neuen Tafeln ungefähr denselben Raum ein wie die älteren, was auf folgende Art zu ermöglichen gewesen ist.

1<sup>o</sup>. Von der Beifügung der Literatur ist in den neuen Tafeln abgesehen worden: für diese bleiben die älteren Tafeln eine, wie ich hoffe, gute Dienste leistende Quelle. So viel als möglich ist aber in den neuen Tafeln doch auch auf mein oben erwähntes *Mémoire* in Band VIII. hingewiesen worden, und, wo dies nicht möglich war oder ausreichte, auf Band IV (*Tables d'Intégrales définies*), was somit rücksichtlich der Quellenangabe wohl als genügend wird angesehen werden können.

2<sup>o</sup>. Die specielleren Formeln sind den allgemeineren untergeordnet und nur dann angeführt worden, wenn sie als für den Gebrauch ein wesentliches und besonderes Interesse darbietend angenommen werden konnten. Eben so sind die Integrale ganz übergangen worden, welche sich unmittelbar und ohne Weiteres aus den entsprechenden allgemeinen oder unbestimmten Integralen ableiten lassen.

Durch alle diese Mittel ist eine sehr grosse Raumersparnis bewirkt und es auch möglich gemacht worden, die erforderliche Literatur nöthigenfalls mit Rücksicht auf Band VIII. und Band IV. (S. vorher) leicht nachschlagen zu können.

Der Druck ist bereits bis zum 70sten Bogen vorgeschritten und wird der niederländischen Typographie alle Ehre machen.

## G e o m e t r i e.

Mathematische Unterhaltungen. Herausgegeben von Oberstudienrath Dr. Riecke. Erstes Heft. Stuttgart. Aug. 1867. 8<sup>o</sup>.

<sup>\*)</sup> M. s. die ausführliche Anzeige dieses „Exposé“ im Literar. Ber. Nr. CLVI. S. 1. (Thl. 39).







gewesen sind. — Auf S. 22—S. 28. sind die der Sternwarte unter dem 14. August 1862 verliehenen neuen Statuten mitgetheilt, auf deren Originale Seine Majestät der Kaiser Höchsteigenhändig geschrieben hat: „**Dem sei also**“, wobei wir auch bemerken, dass in diesen neuen Statuten der Sternwarte zu Ehren ihres Gründers die amtliche Bezeichnung „**Nicolai-Hauptsternwarte**“ verliehen wurde. Nach diesen neuen Statuten bilden das Personal der Sternwarte: a) Der Director. b) Vier ältere Astronomen, von denen einer die Stellung als Vice-Director hat. c) Zwei Adjunkt-Astronomen. d) Zwei Rechner. e) Ein Mechaniker. f) Ein Inspector. g) Ein Schriftführer. h) Ein Arzt; im Ganzen also 13 Personen, woraus die Grossartigkeit des Instituts hinreichend erhellen möge, da die Beschränktheit des Raums weitere Anführungen nicht erlaubt. — Hierauf wird nun von S. 29. an die Thätigkeit der Sternwarte in den vergangenen 25 Jahren unter folgenden Rubriken zusammengefasst: I. **Astronomische Thätigkeit.** 1. Die Beobachtungen. a) das grosse Passageninstrument von Ertel. b) Der grosse Vertikalkreis von Ertel. c) Der Meridiankreis von Repsold. d) Das Passageninstrument im ersten Vertikale. e) Der grosse Refractor. f) Das Heliometer. 2. Die Reduction und Publication der Beobachtungen. 3. Andere astronomische Arbeiten. II. **Geographisch-geodätische Thätigkeit.** a) Von der Sternwarte ausgeführte Unternehmungen (1844: Basismessung bei Elimä im südlichen Finnland. 1845: Basismessung bei Uleaborg und astronomische Bestimmungen in ihrer Nachbarschaft, so wie bei Torneo. 1848: Basismessung bei Romankauzi. 1850: Astronomische Bestimmungen am Nordende der Gradmessung von Fuglenaes in Finnmarken. 1851: Wiederholung der astronomischen Bestimmungen bei Torneo und Basismessung bei Ofertorneo. 1852: Basismessung bei Taschbunar nahe dem Südense der Gradmessung in Bessarabien. 1853: Bestimmung der Polhöhe von Bielin. 1855: Bestimmung der Polhöhe von Nemesch). b) Andere auf Geodäsie und geographische Ortsbestimmung bezügliche Studien und Arbeiten. c) Unterstützung der von anderen Behörden unternommenen Arbeiten. III. **Die Lehrthätigkeit.** a) Ausbildung jüngerer Gelehrten (namentliche Aufführung der hier gebildeten Astronomen, neun und dreissig aus den verschiedensten Gegenden der Erde). b) Ausbildung von Militairs für die geodätischen Arbeiten im Reiche; neun und sechzig Offiziere vom Landheere und der Flotte haben hier ihre Ausbildung erhalten. — IV. **Die mechanische Werkstatt.** — **Die Beziehungen zu anderen Sternwarten und Ge-**

**lehrten.** (Keiner der bedeutenderen Astronomen fehlt hier). — **Nachschrift** (Entstehung der Schrift). — Den Schluss bildet das in literarischer Rücksicht mit dem grössten Danke aufzunehmende: **Verzeichniss der von Pulkowaer Astronomen publicirten Schriften von 1839 bis 1864.** — Welche grossartige Thätigkeit nach allen möglichen Seiten und Richtungen hin! Möge die herrliche Nicolai-Sternwarte fernerhin immer noch schöner gedeihen zur Ehre ihres edlen Gründers, dessen Namen sie trägt!

Von den neueren Publicationen der Nicolai-Hauptsternwarte wollen wir hier noch auf die folgenden aufmerksam machen:

1. Jahresbericht, am 17. Mai 1864 dem Comité der Nicolai-Hauptsternwarte abgestattet vom Director der Sternwarte. St. Petersburg. 1864. 8<sup>o</sup>.

Jahresbericht, am 19. Mai 1865 dem Comité der Nicolai-Hauptsternwarte abgestattet in Vertretung des Directors der Sternwarte von dem älteren Astronomen W. Dölln. St. Petersburg. 1865. 8<sup>o</sup>.

2. Observations de la grande nébuleuse d'Orion, faites à Cazan et à Poulkova. Par O. Struve. I<sup>re</sup> Partie: Mémoire de M. Liapounov sur les observations de Cazan. II<sup>e</sup> Partie. O. Struve: Additions au mémoire de M. Liapounov et observations de Poulkova. St.-Pétersbourg. 1862. 4<sup>o</sup>.

3. Die Zeitbestimmung mittelst des tragbaren Durchgangsinstrumentes in Verticale des Polarsterns. Von W. Dölln. St. Petersburg. 1863. 4<sup>o</sup>.

4. Beobachtungen des Mars um die Zeit der Opposition 1862. Von Dr. A. Winnecke. St. Petersburg. 1863. 4<sup>o</sup>.

5. Pulkowaer Beobachtungen des hellen Cometen von 1862, nebst einigen Bemerkungen. Von Dr. A. Winnecke. St. Petersburg. 1864. 4<sup>o</sup>.

6. Untersuchungen über die Constitution der Atmosphäre und die Strahlenbrechung in derselben. Von Dr. H. Gyllén. St. Petersburg. 1866. 4<sup>o</sup>.

Alle diese Schriften sind von grosser wissenschaftlicher Bedeutung, was rücksichtlich der eigentlichen theoretischen oder mathematischen Astronomie insbesondere von 3. und 6. gilt.







## Vermischte Schriften.

**Annali di Matematica pura ed applicata** pubblicati da Barnaba Tortolini e compilati da E. Betti a Pisa, F. Brioschi a Milano, A. Genocchi a Torino, B. Tortolini a Roma. (Vergl. Literar. Ber. No. CLXXX. S. 7.).

Tom. VII. No. 5. Sulle proprietà geometriche e dinamiche de' centri di percossa ne' moti di rotazione. Memoria di D. Chelini. p. 217. — Recherches sur les équations du cinquième degré par M. Roberts. p. 257. — **Rivista bibliografica.** La Messàhat De Mohammed Ben Moussa al Khàrezmi. Extrait de son Algèbre. Traduit et annoté par Aristide Marre. p. 269.

**Giornale di Matematiche** ad uso degli studenti delle università italiane, pubblicato per cura del Professore G. Battaglini. Napoli. (S. Literar. Ber. Nr. CLXXXI. S. 13.)

Anno IV. Settembre e Ottobre 1866. Nota sulle equazioni differenziali che si presentano nei problemi di Meccanica; per R. del Grosso. p. 257. — Sull' inversione quadrica delle curve piane; per T. A. Hirst. p. 278. — Questioni. p. 293. — Teorema sui determinanti a due scale e soluzione della questione 47: per G. Torelli. p. 294. — Altra soluzione; per L. Rajola. p. 297. — Annunzio Bibliografico. p. 297. — Sulle superficie gobbe applicabili su quelle di rivoluzione, e su alcune proprietà delle superficie gobbe delle normali principali di una curva; per U. Dini. p. 298. — Sulle superficie gobbe che soddisfanno a date equazioni alle derivate parziali del second'ordine; per U. Dini. p. 305. — Questioni. p. 318.

**Sitzungsberichte der kais. Akademie der Wissenschaften in Wien.** (Vergl. Literar. Ber. Nr. CLXXIX. S. 20.).

Band LII. Heft III. Mach: Ueber die Wirkung der räumlichen Vertheilung des Lichtringes auf der Netzhaut. S. 303. — Unferdinger: Theorie der Transversalen, welche die Mittelpunkte der Seiten eines sphärischen Dreiecks verbinden: darauf bezügliche Lehrsätze und Probleme. (Sehr ausführlich und beachtenswerth.) S. 323. — Schwarzer: Beziehungsgleichungen zwischen der Seite und dem Halbmesser gewisser regelmässiger







p. 294. — F. J. Stamkart: Over den invloed van luchtdrukking en capillaire werking bij de vervaardiging en het gebruik van Areometers. Bepaling door proefneming van de hoeveelheid vloeistof welke buiten aan eene buis door de capillaire werking opgehouden wordt. p. 320. — F. Kaiser: Waarnemingen omtrent een Merkwaardigen Vuurbot, volbragt aan de Sterrewacht te Leiden. p. 349. — F. Kaiser: Eenige opmerkingen omtrent de periodieke fouten van Mikrometer-schroeven, naar aanleiding van de jongste onderzoekingen aan de Sterrewacht te Leiden. p. 359. — J. van Gogh: Overzicht van de heershende winden en daarbij waargenomen Barometerstanden te Nagasaki op het eiland Desima in Japan.

---





































Erde auf ihre Richtung. I. Die beständigen Winde (Passate). II. Die jährlich periodischen Winde (Monsoons). III. Die veränderlichen Winde. — Die Stürme. I. Stürme der heissen Zone und ihr Eingreifen in die gemässigte. II. Stürme, welche an der äussersten Gränze des Passats entstehen. III. Staustürme. IV. Stürme durch seitliche Einwirkung entgegengesetzter Ströme auf einander. Allgemeine Ergebnisse. — Praktische Regeln. Passate. Gebiet der Monsoons. Nördliche gemässigte Zone. Südliche gemässigte Zone. Kalte Zone. — Beigegeben sind mehrere Sturmkarten, namentlich eine grosse sehr schöne Darstellung des Sturms vom 20. Januar 1863.

## Wichtige literarische Anzeige.

Herr L. Cremona, gegenwärtig Professor am „Istituto Tecnico Superiore“ in Mailand, welches unter Brioschi's Directorium immer mehr aufblühet, wird seiner schönen, von Herrn M. Curtze übersetzten „Introduzione ad una Teoria geometrica delle curve piane“ das nachstehend angezeigte Nachschub folgen lassen. Ich hoffe mit Bestimmtheit, dass es mir gelingen wird, unverzüglich eine Uebersetzung auch dieses Werkes zu veranlassen, und habe dazu bereits die erforderlichen Schritte gethan.

Grunert.

# PRELIMINARI DI UNA TEORIA GEOMETRICA DELLE SUPERFICIE

PER

**LUIGI CREMONA**

Prof. al R. Istituto Tecnico Superiore in Milano.

Questo lavoro è pubblicato dall'Accademia delle scienze di Bologna nelle sue *Memorie*, ed è già uscita la prima parte, che consta di un fascicolo di 6 fogli di stampa in 4<sup>o</sup>. gr. — A complemento mancano circa 10 altri fogli, che usciranno entro il 1867.

Di quest' opera isolata non sono in vendita che sc  
copie, le quali trovansi già sin d'ora depositate presso il  
ZANETTI FRANC., Amministratore del *Politecnico*, in Milan

L'opera intera costa it. L. 6; chi amasse comperarla è p  
spedire un Vaglia postale di detta somma, intestato al Z  
il quale manderà tosto la parte pubblicata, ed in seguito i  
pimento, *franco* d'ogni spesa.

---

Kurz vor dem Schluss dieses Literarischen Berichts i  
noch zugegangen:

Discorso di Apertura del secondo Anno della  
coltà di Chimica, fondata per iniziata privata.  
dal Fondatore Prof. Carlo Cassola. Napoli. Tipog  
de' Fratelli de Angelis. 1867. (19 Seiten.)

Dieser „Discorso“ enthält einen sehr interessanten  
führlichen Bericht über das vorher genannte sehr grossartig  
mische Institut, dessen Errichtung im Jahre 1866 wir sch  
Literar. Ber. CLXXX. S. 8. angezeigt haben. Wir mache  
unsere Leser, die für Chemie sich interessiren, recht sel  
diese Schrift aufmerksam. G.

---









Die Hunderte von Schülern, welche in ihm ihren Lehrer verehren, sind mit uns gewiss einer Meinung, wenn wir sagen: Koller war nicht nur ein ausgezeichneter Schulmann, er war auch ein Freund der Jugend, deren Sympathien er vollständig besass und in deren Andenken er immer fortleben wird. Was jedoch Koller während dieser siebzehn Jahre als Mann der Wissenschaft leistete, davon geben die vielen und verschiedenartigsten Publikationen mehr als genügend Zeugniß.

Die Sternwarte dieses mit Recht berühmten Benediktinerstiftes feierte vor wenigen Jahren ihr erstes Säculum. Der erste Astronom derselben, P. Placidus Fixlmiller (1762—1791), ein ebenso genialer als lebenswürdiger Mann, begründete schnell den Ruf dieses neuen Uranientempels. Seine Leistungen und seine ausgebreitete Correspondenz mit de la Lande, Johann Bernoulli, Maximilian Hell u. v. a., beweisen diess zur Genüge. An diesen reihte sich in würdiger Weihe P. Thaddaeus Derflinger, (1791—1824), dessen Name in der astronomischen Welt sich des besten Rufes erfreut. Sein Nachfolger P. Bonifaz Schwarzenbrunner, ein äusserst talentvoller und strebsamer junger Mann, bekleidete die Stelle eines Astronomen, wie wir bereits erwähnten, nur sechs Jahre, bis zum Jahre 1830, wo ihn der Tod plötzlich abrief. Der vierte Astronom dieser Sternwarte war nun jener Mann, dessen Andenken diese Zeilen geweiht sind — es ist unser unvergesslicher Koller. Wenn wir hier mit einigen Worten eine Geschichte der Sternwarte einflochten, so geschah diess nur, um darauf hinweisen zu können, dass sich Koller vollkommen würdig an seine drei Vorgänger anreihete und den Ruf dieser Sternwarte nicht nur nicht schmälerte, sondern wo möglich noch vergrösserte. In Gemeinschaft mit seinem intimen Freunde Professor Stampfer, welcher leider noch früher als Koller der Wissenschaft entrissen wurde und dessen Andenken erst kürzlich in diesen Blättern so schön gewahrt wurde, stellte er den zweischubigen Meridiankreis auf (1831), dann ein tragbares Aequatorial, mit welchen Instrumenten die Beobachtungen seit ihm ohne Unterbrechung fortgesetzt werden. Grosse Aufmerksamkeit widmete Koller den meteorologischen Beobachtungen, denn seit 1831 bereits datiren die täglichen Aufzeichnungen über Luftdruck, Temperatur, Dunstdruck u. s. f., aus welchem Materiale Koller uns einige äusserst interessante Arbeiten hinterlässt. Als im dritten Decennium Humboldt und Gauss die Untersuchungen über den Erdmagnetismus anregten, war Koller einer der ersten, der die Sache aufgriff, und gründete daher 1839 das magnetische Observatorium, welches der Zeit



serliche Akademie der Wissenschaften zu ihrem wirklichen Mitgliede, welche Wahl am 1. Februar bereits vom Kaiser bestätigt wurde.

Das erste Jahr seiner Thätigkeit im Staatsdienste war bekanntlich das verhängnissvolle Jahr 1848. Doch trotz aller Gefahren und Wirren blieb Koller am Platze und zog sich nur Ende Oktober auf einige Tage in das Stift Melk zurück, von wo er gleich Anfangs November wieder zurückkehrte. Als im Jahre 1849 die k. k. Studien-Hofkommission aufgehoben und an deren Stelle ein Ministerium für Cultus und Unterricht trat, wurde Koller als k. k. Sectionsrath in dasselbe übersetzt und ihm das Referat über die polytechnischen, nautischen und astronomischen Institute übertragen. In diesem Jahre ging gleichzeitig Koller's Wirksamkeit als Präses der philosophischen Fakultät zu Ende, da ein Gesetz vom 29. Oktober 1849 den akademischen Behörden eine andere Organisation gab. Wie sehr er sich die Achtung dieser Körperschaft in dem nur kurzen Zeitraum von kaum zwei Jahren erworben, zeigt die ihm bei seinem Scheiden von dieser zuerkannte Auszeichnung. Dieselbe ernannte ihn nämlich durch Acclamation zum wirklichen Mitgliede des Doktoren-Collegiums der philosophischen Fakultät der Wiener Universität und überreichte ihm das Doctor-Diplom mit dem Beisatze: „*de republica literaria optime meritus.*“

Als 1851 das Ministerium für Cultus und Unterricht definitiv organisirt wurde, avancirte Koller zum k. k. Ministerialrathe mit Belassung seines Referates. Mit diesem Jahre trat in Oesterreich die moderne Mittelschule, die sechsklassige Realschule, in's Leben, welches Werk fast ausschliesslich eine Schöpfung Koller's war und denen er auch bis an sein Lebensende sympathisch blieb. Wenn auch heut zu Tage mit Recht Rufe nach Reform dieser jungen Lehranstalten laut werden, so waren dieselben damals, wo es mit dem Unterrichtswesen in Oesterreich noch nicht gar sonderlich gut aussah, gewiss ein nicht zu unterschätzendes Werk. Wer die Früchte kennt, welche diese Schulen während ihres fünfzehnjährigen Bestandes in Oesterreich getragen haben; wer weiss, wie viele tausende von jungen tüchtig geschulten Kräften den verschiedensten technischen und industriellen Etablissements durch diese zugeführt wurden, der wird die Verdienste würdigen können, welche sich Koller um den nationalen Wohlstand Oesterreichs erworben. Dass diese Verdienste auch allerhöchsten Orts gewürdigt wurden, zeigt uns die Auszeichnung, welche Koller 1859 zu Theil wurde. Sr. Majestät Kaiser Franz Josef verlieh ihm nämlich am 27. Mai d. J. taxfrei das Ritterkreuz



Die Verhandlungen begannen, das Statut wurde von Sr. Majestät sanctionirt und das Professorencollegium hatte nun seine Anträge zu stellen. Antrag auf Antrag kam nun au's Ministerium, alle mussten durch Koller's Hand gehen — doch seiner Arbeitskraft, seinem Geiste war nichts zu viel. Mit gewohntem sicheren Takte traf er seine Entschlüsse und legte sie seinem Minister vor. Schon waren mehr als 20 Professoren ernannt, schon war bestimmt, dass mit dem 1. Oktober das reorganisirte Institut in's Leben zu treten habe, nur noch einige Ernennungen fehlten und das neue Gebäude war hergestellt, sein letzter Wunsch erfüllt — da kam der unerbittliche Tod und Koller war nicht mehr.

Schreiber dieser Zeilen war noch am 18. September d. J. Mittags durch fast zwei Stunden bei ihm in seiner Wohnung, um über eine astronomische Arbeit seinen Rath einzuholen. In der heitersten Stimmung überreichte er mir einige vollständig gerechnete astronomische Aufgaben, die er Abends des vorigen Tages ausführte, zeigte mir eine neue Broschüre von dem von ihm besonders hochgeschätzten Herausgeber dieser Zeitschrift und verabschiedete sich mit den Worten: „besuchen Sie mich diese Tage wieder, den nächsten Sonntag gehe ich nach Kremsmünster, um ein wenig Bergluft zu athmen“ — es sollten die letzten Worte sein, die der freundliche Gönner gesprochen. Abends noch bis in später Stunde arbeitend, ereilte ihn des Morgens — am 19. September — die tückische Krankheit, Mittags gaben ihn die Aerzte auf und um 5 Uhr Nachmittags ward er eine Leiche.

Er ruhe in Frieden!

Uns aber sei es noch erlaubt, einige Züge aus den letzten Jahren seiner Thätigkeit hier anzuführen, welche so recht bestätigen, was wir bereits früher über ihn sagten. Koller blieb trotz seines umfangreichen Referats, trotz seiner angestreugten Berufsthätigkeit bis zur letzten Stunde seines Lebens der von ihm gepflegten Wissenschaft treu. Es entging ihm keine wissenschaftliche Novität und erzählte man ihm von einer, so war diess gewiss seine nächste Lektüre. Er sah auf junge Kräfte nicht vielleicht mit einer gewissen Geringschätzung herab — nein, er eiferte sie an und unterstützte selbe. War an der philosophischen Fakultät ein anziehendes astronomisches Collegium angekündigt, so war Koller derjenige, den man unter den Zuhörern fand. So besuchte der 74jährige Greis noch im letzten Sommersemester das Collegium unseres jungen Astronomen Oppolzer über Bahnbestimmungen und zwar so eifrig, als er es im Jahre 1812 unter dem Astronomen Bürg gethan haben mochte. Aber nicht nur noch

















$$ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = 0$$

gegeben ist, und  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  die drei Wurzeln derselben sind, so soll die Gleichung gefunden werden, welche die Verhältnisse

$$\frac{\alpha}{\beta}, \quad \frac{\beta}{\alpha}, \quad \frac{\alpha}{\gamma}, \quad \frac{\gamma}{\alpha}, \quad \frac{\beta}{\gamma}, \quad \frac{\gamma}{\beta}$$

zu Wurzeln hat). — Pubblicazioni recenti.

Nach der Anzeige, welche die Leser am Ende dieses Literarischen Berichts finden, werden die *Annali di Matematica pura ed applicata* von jetzt an von den Herren Brioschi und Cremona in Mailand herausgegeben werden. Wie grossen Dank die Wissenschaft den Herren Betti, Genocchi und namentlich Herrn Tortolini für die bis jetzt herausgegebenen, so vieles Treffliche enthaltenden sieben ersten Bände schuldet, kann Niemand mehr erkennen als der Unterzeichnete; Herr Tortolini hat schon früher sich durch die Herausgabe der *Annali di Scienze matematiche e fisiche*, von denen acht Bände erschienen sind, sehr verdient gemacht. In bessere Hände, als in die der Herren Brioschi und Cremona, konnte die Fortsetzung der neueren „*Annali*“ nicht gelegt werden. Grunert.

*Giornale di Matematiche ad uso degli studenti delle università italiane*, pubblicato per cura del Prof. Battaglini. Napoli. (S. Literar. Ber. Nr. CLXXXII. S. 12).

Anno IV. Novembre e Dicembre 1866. Di una proprietà dell' iperboloide; per A. Moggi. p. 321. — Sopra il pendolo ad oscillazioni coniche; per A. Moggi. p. 327. — Sopra le diverse espressioni della forza acceleratrice nella teoria delle forze centrali; per A. Moggi. p. 339. — Quistione. p. 344. — Nota intorno ad una proposizione della teoria dei numeri del Dottore Piuma Carlo Maria. p. 345. — Sulla rotazione di un sistema di tre masse che verificano la legge delle aree; per A. de Gasparis. Continuazione alle note precedenti. Vedi p. 202. e vol. III. p. 257, p. 344, p. 348. — Moto di un sistema invariabile di punti materiali esistenti in un piano intorno al centro di gravità; per A. de Gasparis. p. 353. — Soluzioni della questione 48. (Vedi p. 293). Soluzione del Antonio Tarlasco. p. 359. Soluzione di Giulio Ascoli. p. 360. — Soluzione delle questioni 52 e 54; per Ernesto Padova. p. 361. — Soluzione delle quistioni 52 e 53; per Gabriele Torelli. p. 367. — Soluzione della questione 54; per A. Armenante. p. 369. — Saggio elementare di Geometria

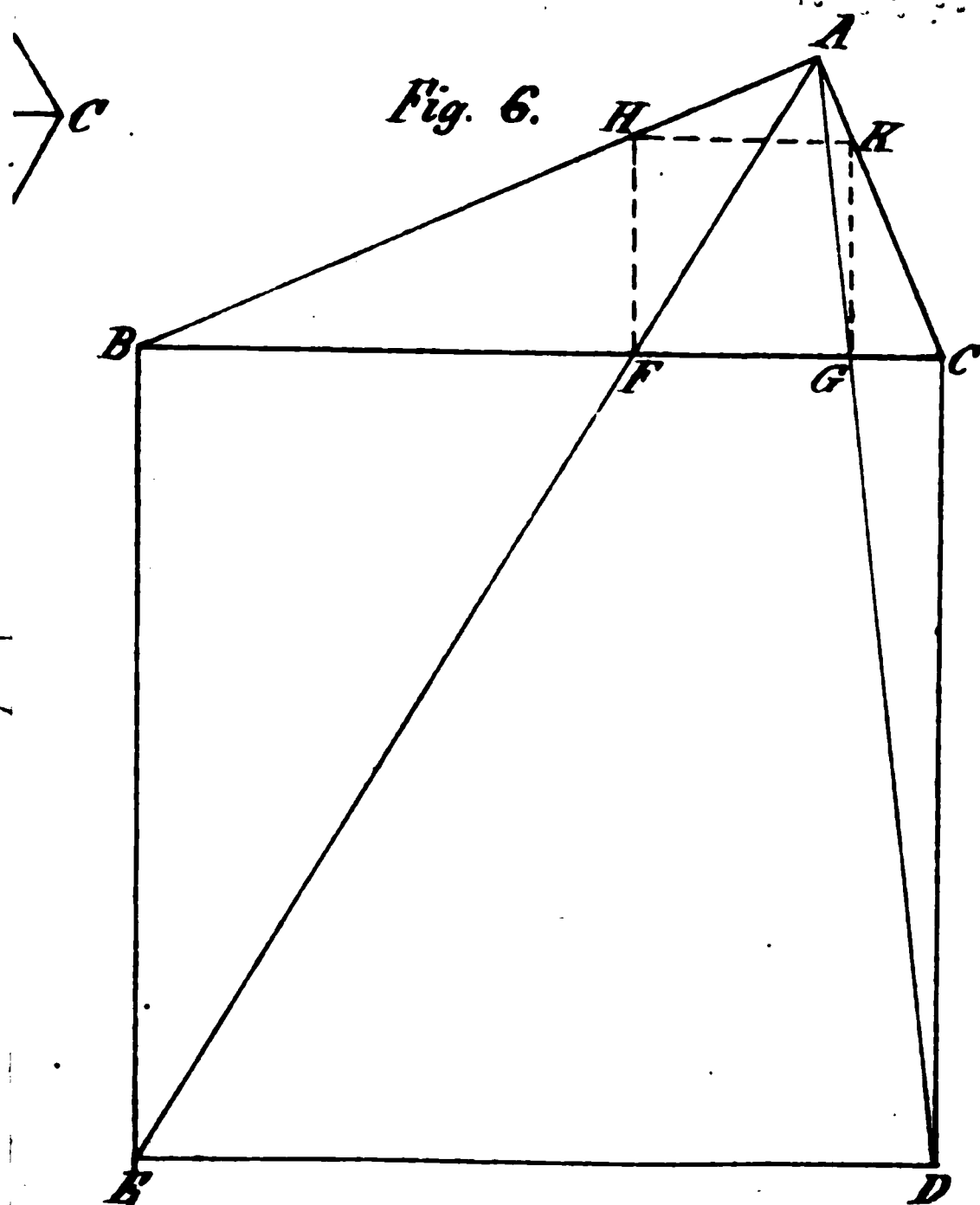
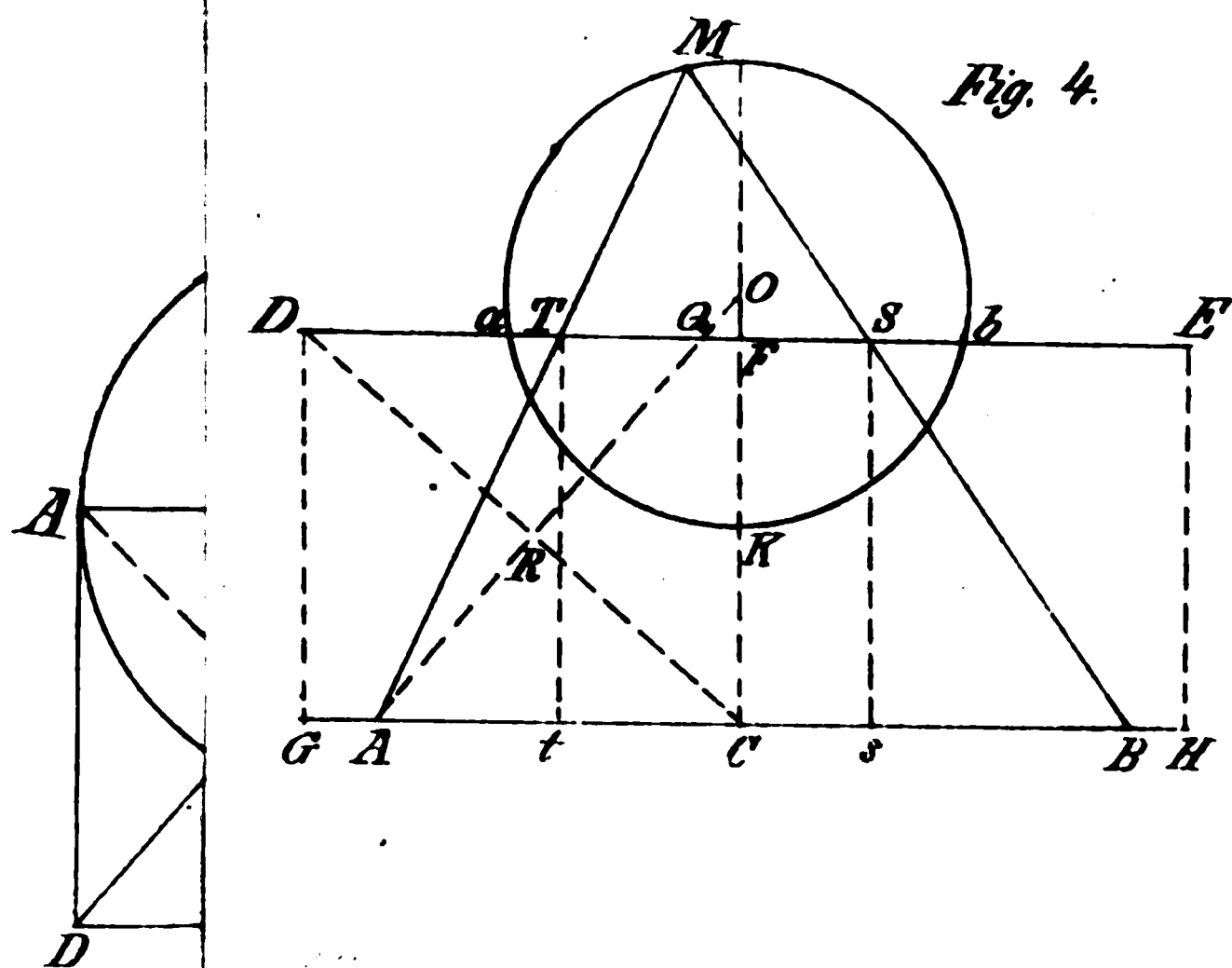














Fig

Fig. 9.

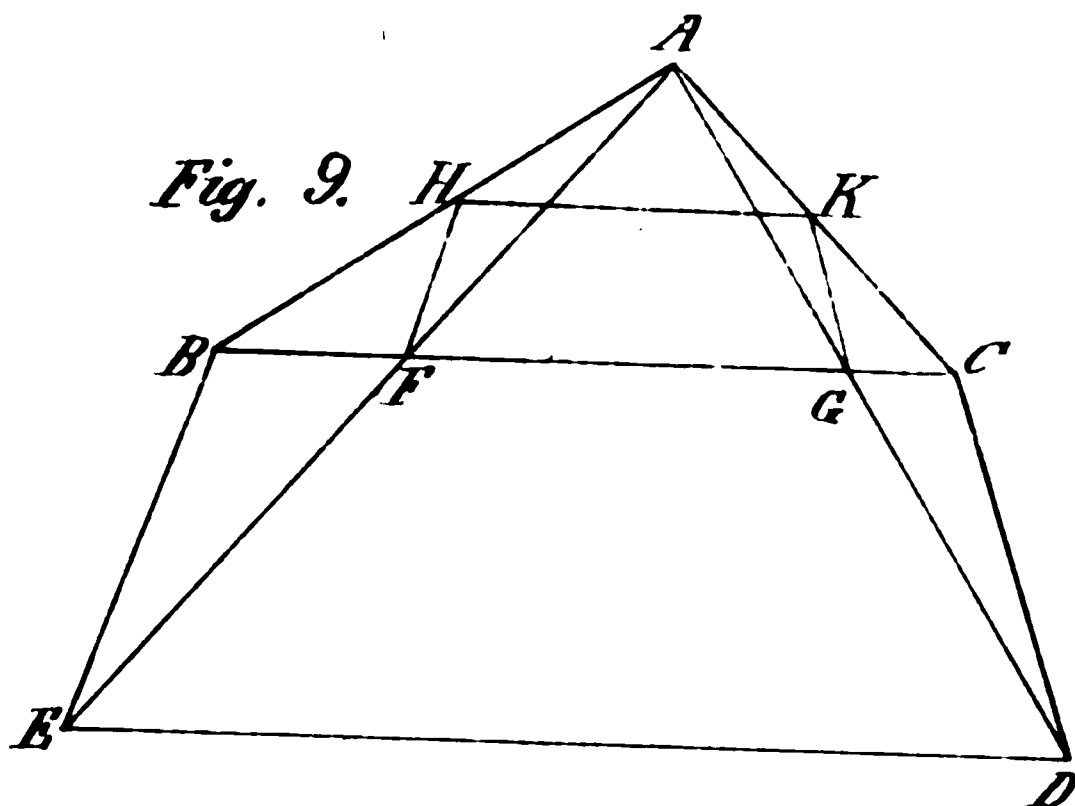


Fig. 10.

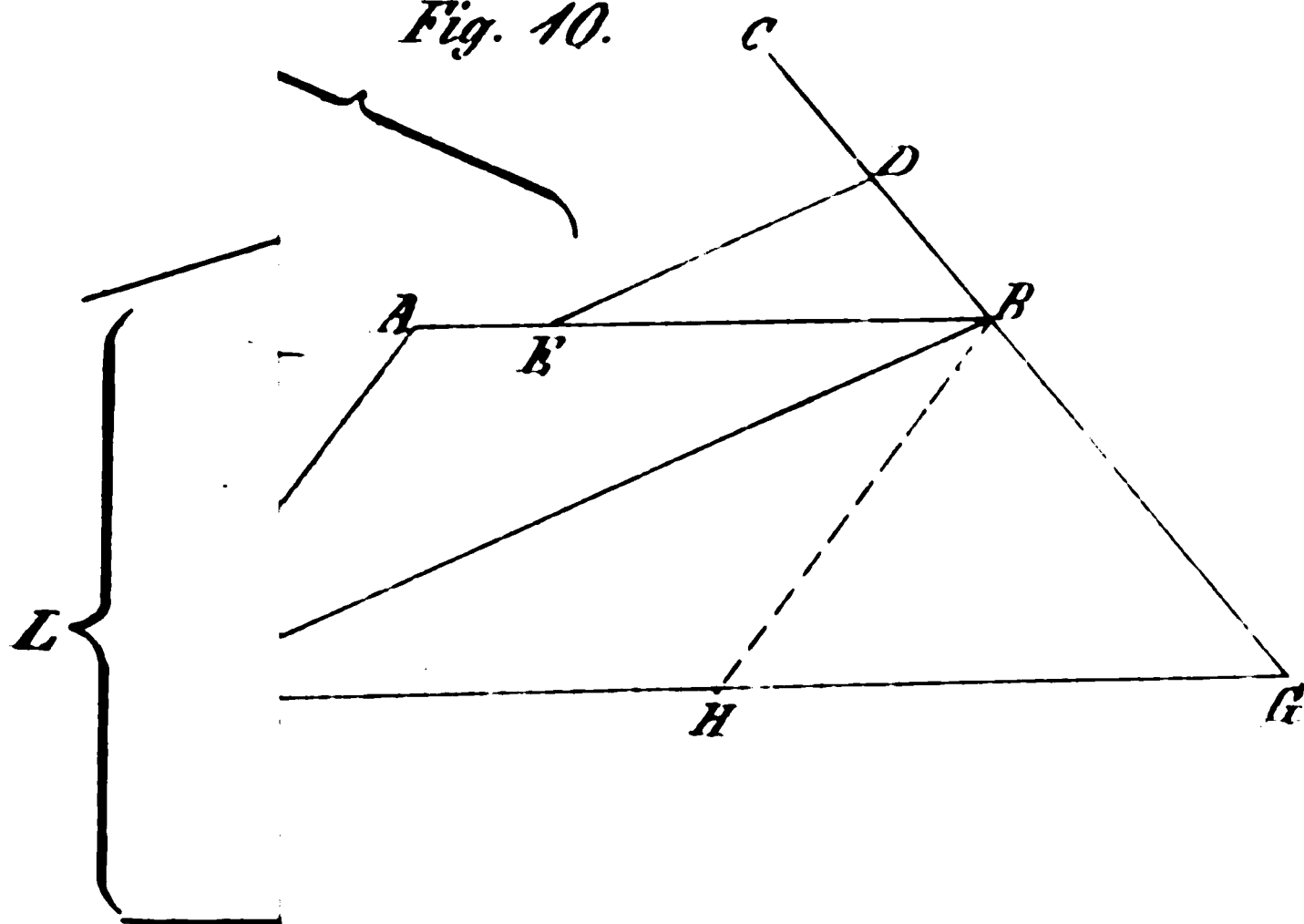




Fig. 5.

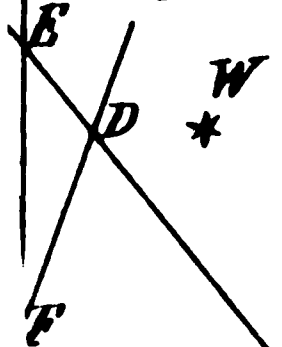


Fig. 6.

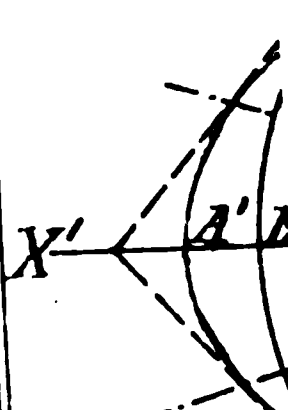
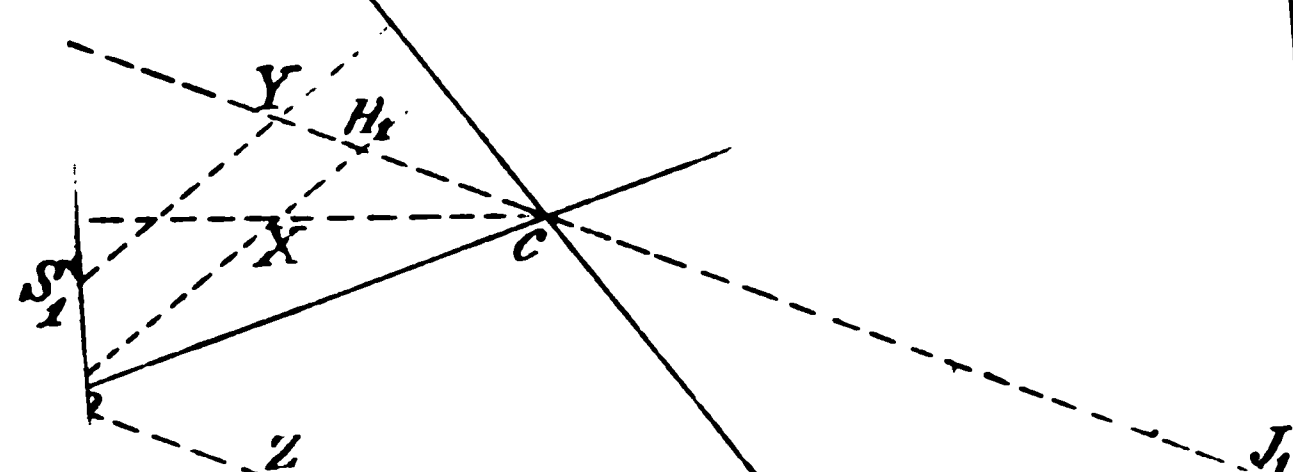
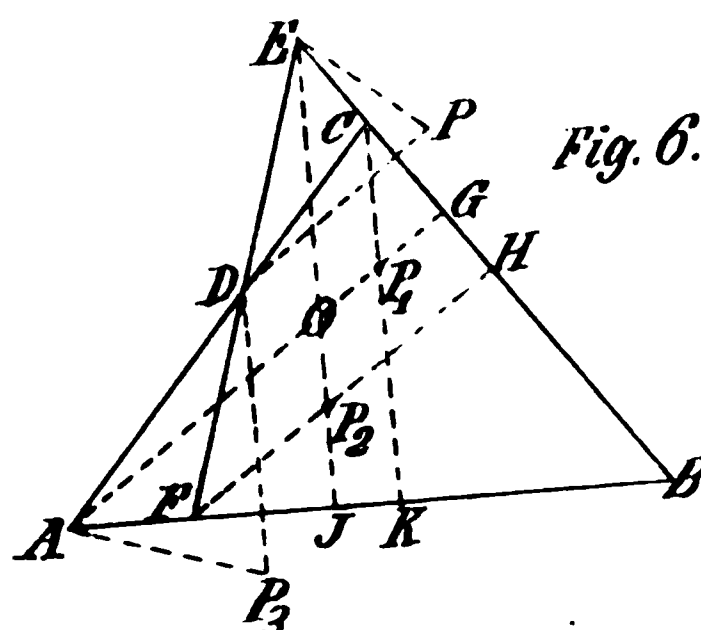


Fig. 9.

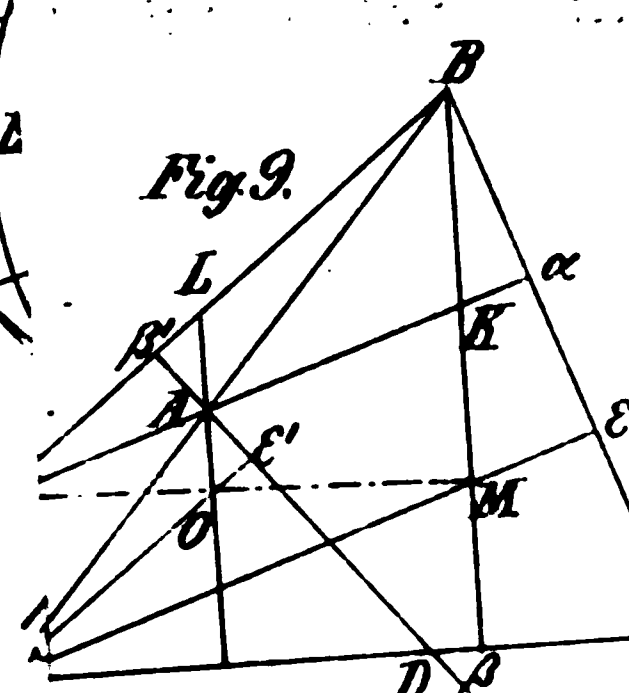


Fig. 10.

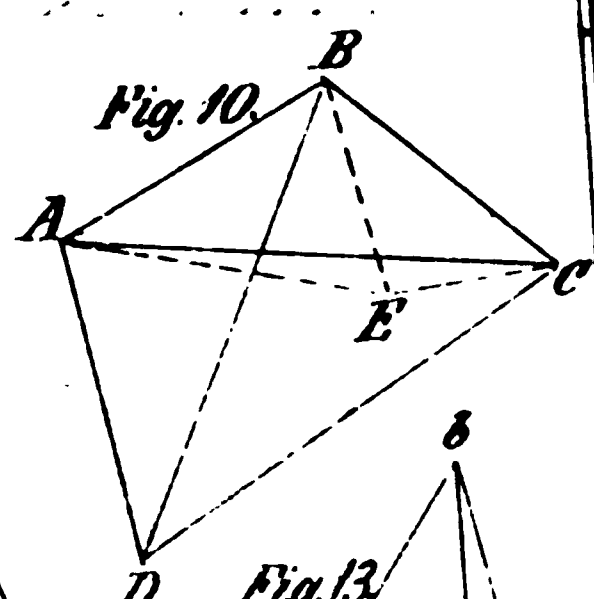


Fig. 13.

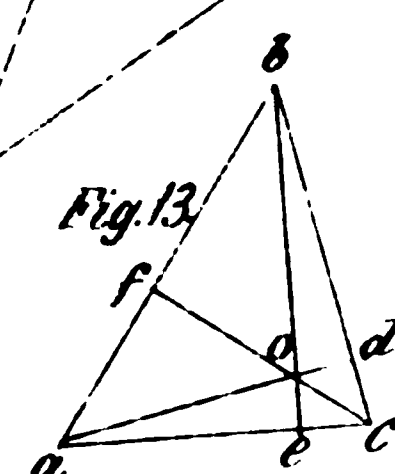


Fig. 15.

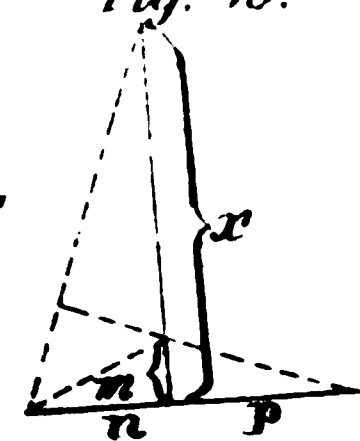
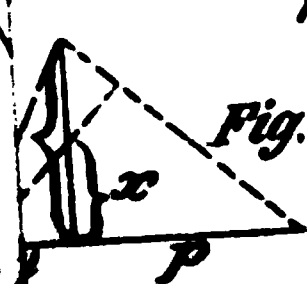
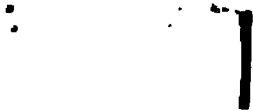
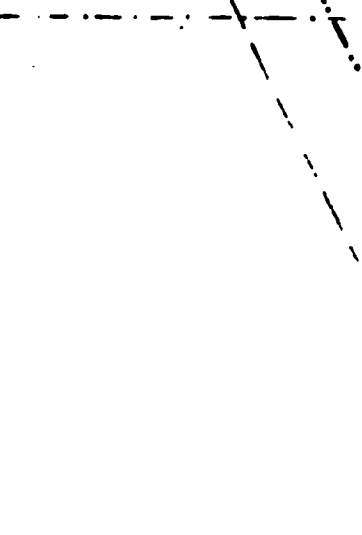
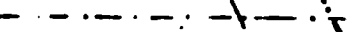
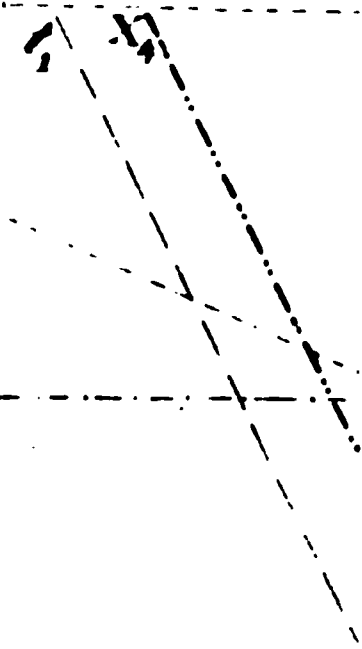
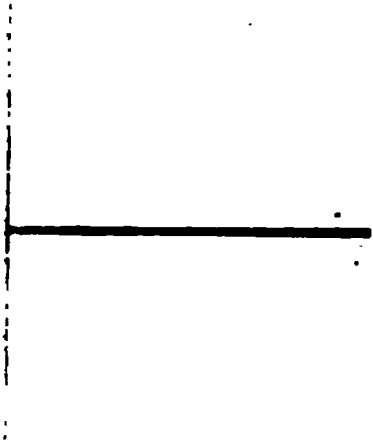


Fig. 14.











PROFESSOR LIBRARY

$p$

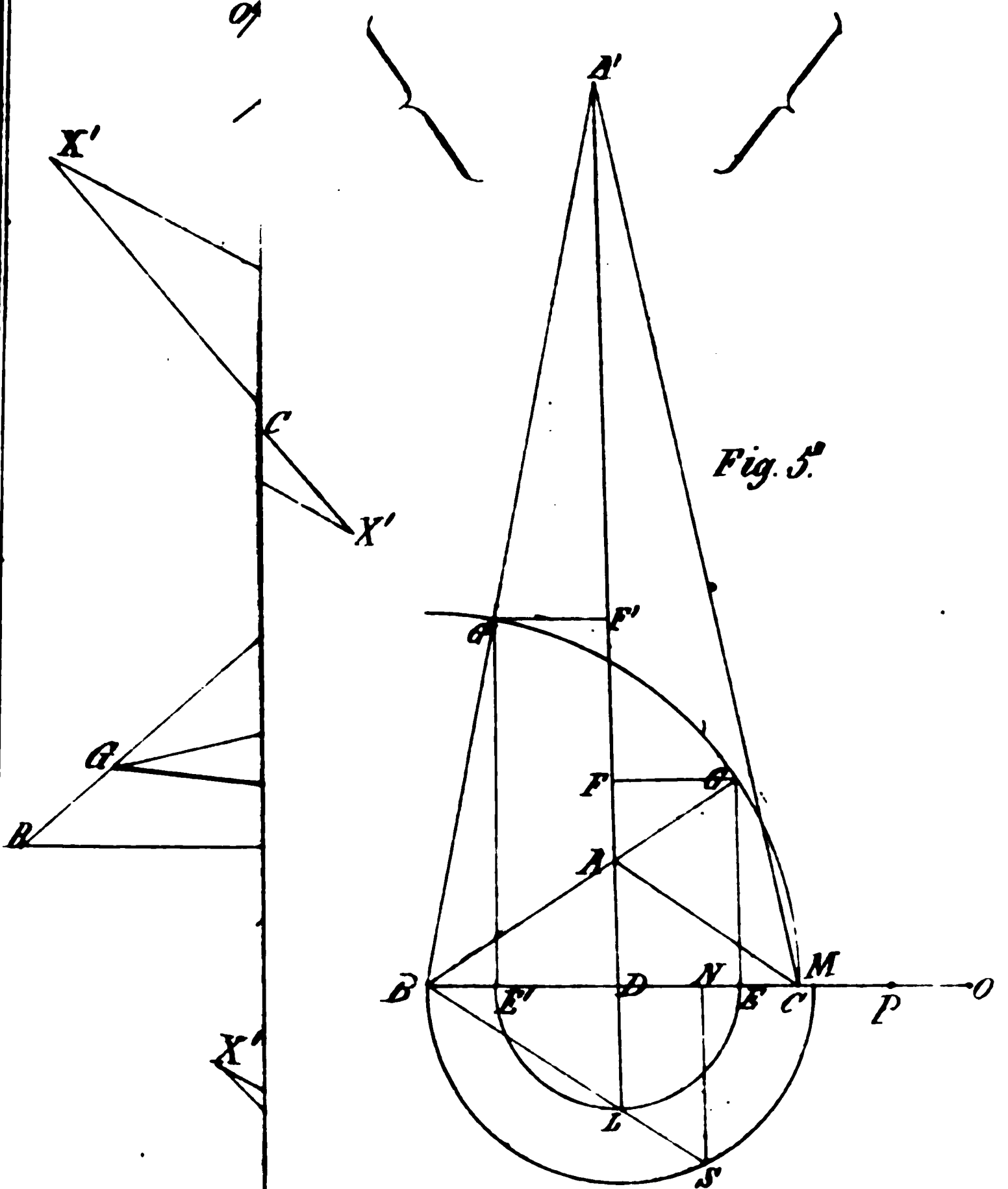


Fig. 5.







NO. LIBRARY

Fig. 4.

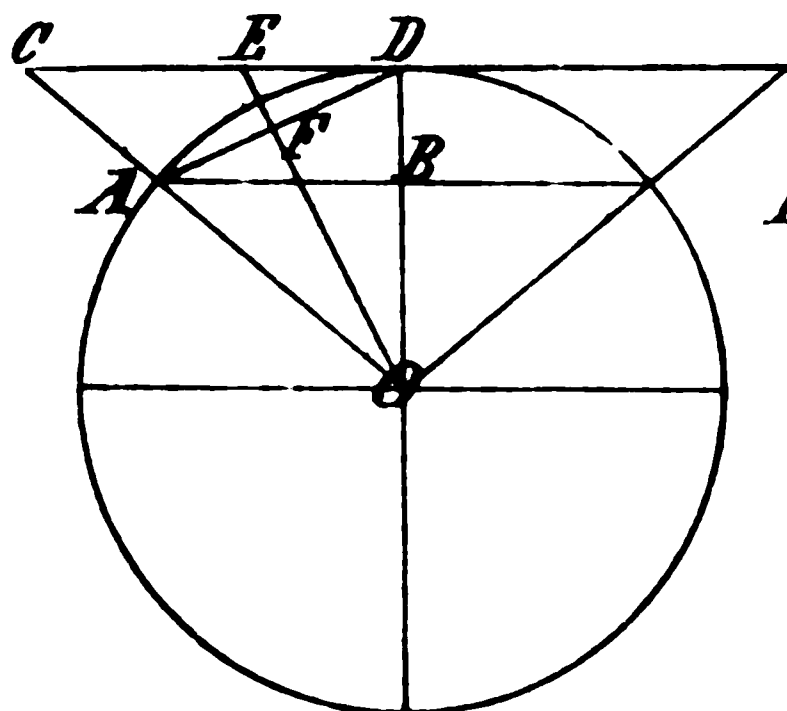
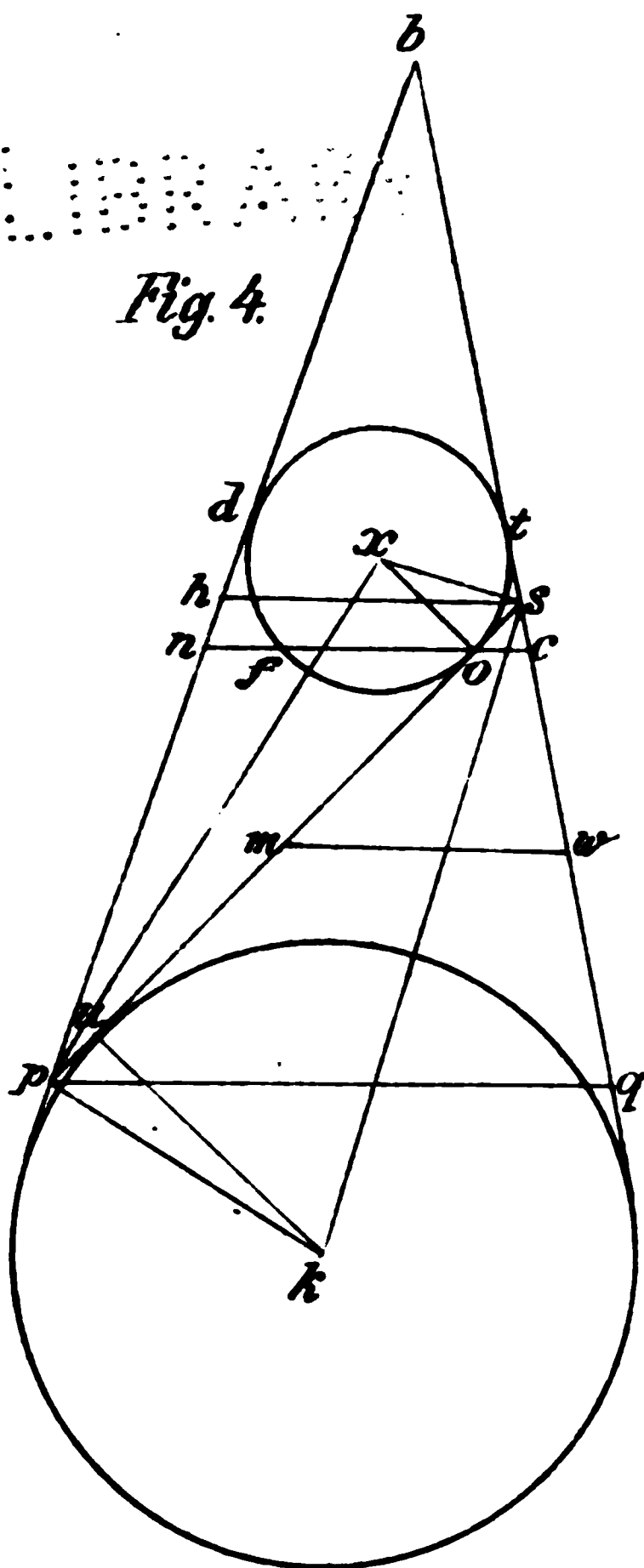
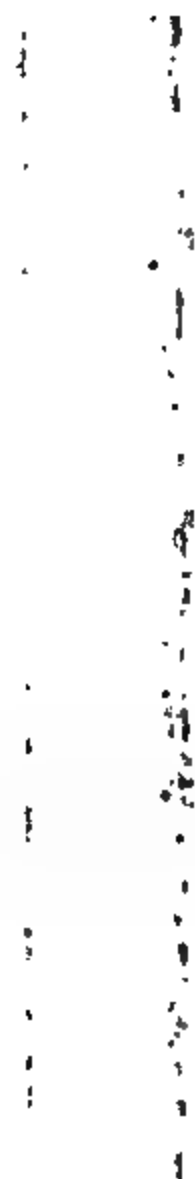
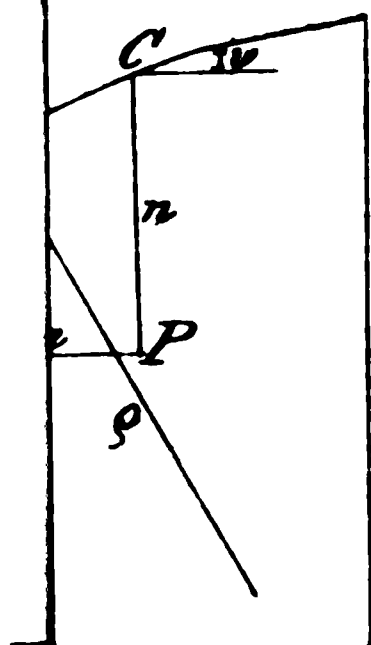


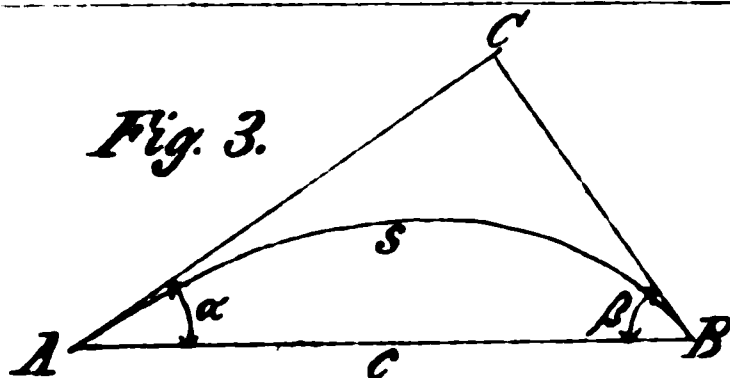
Fig. 6.



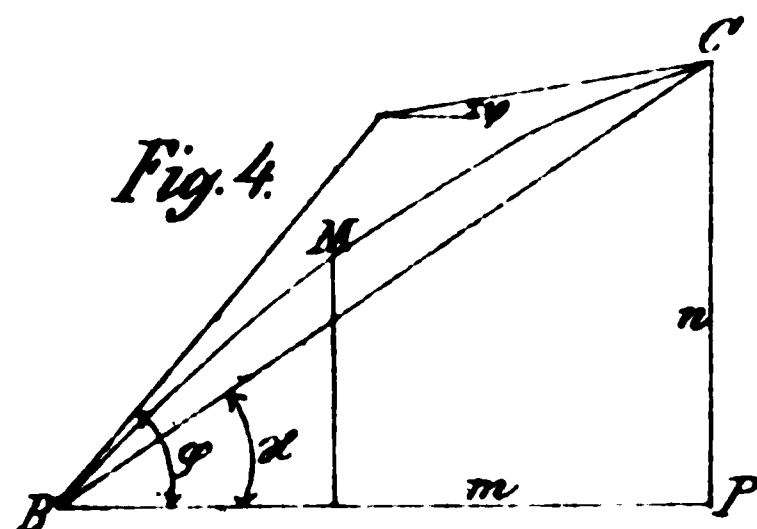




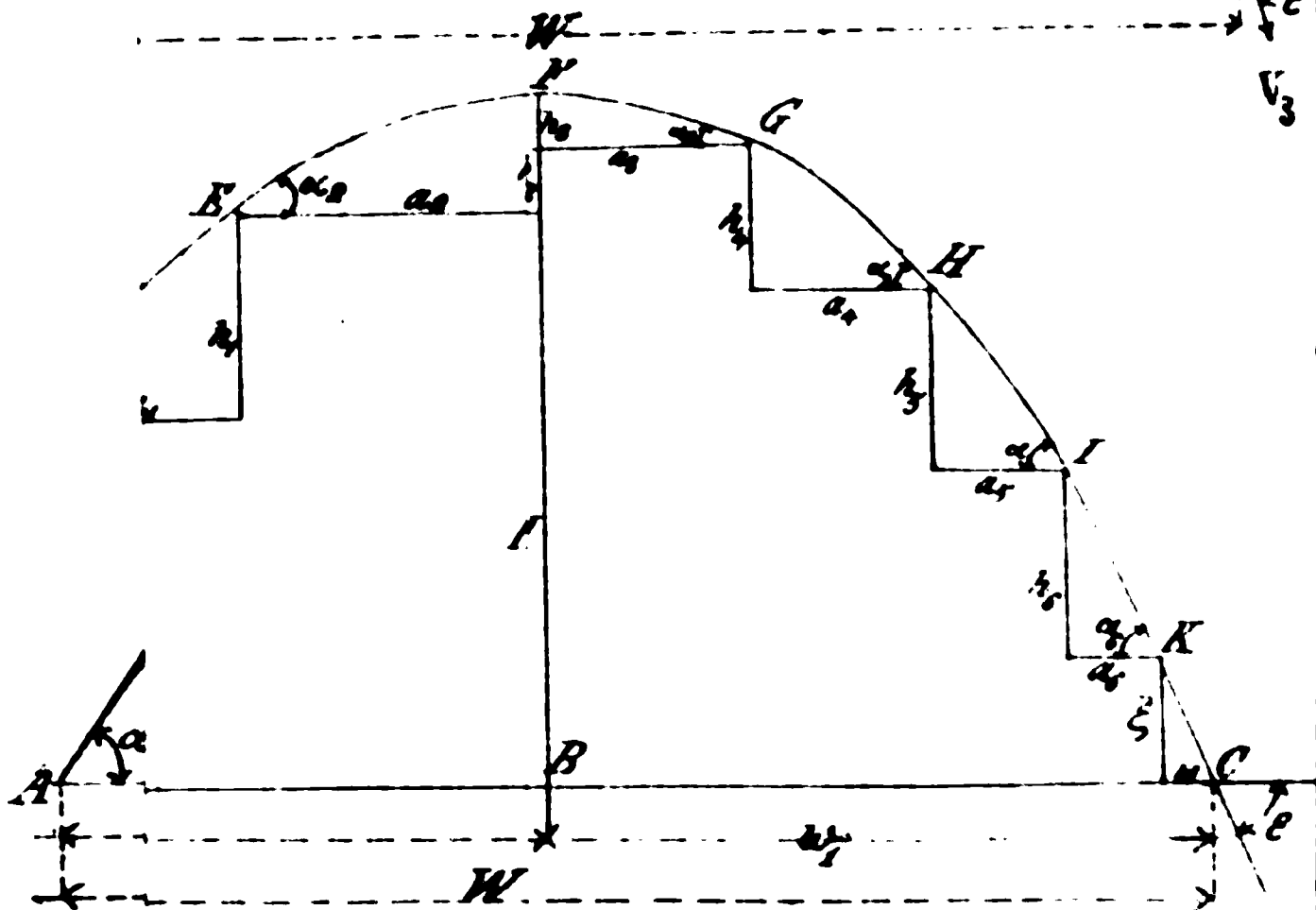
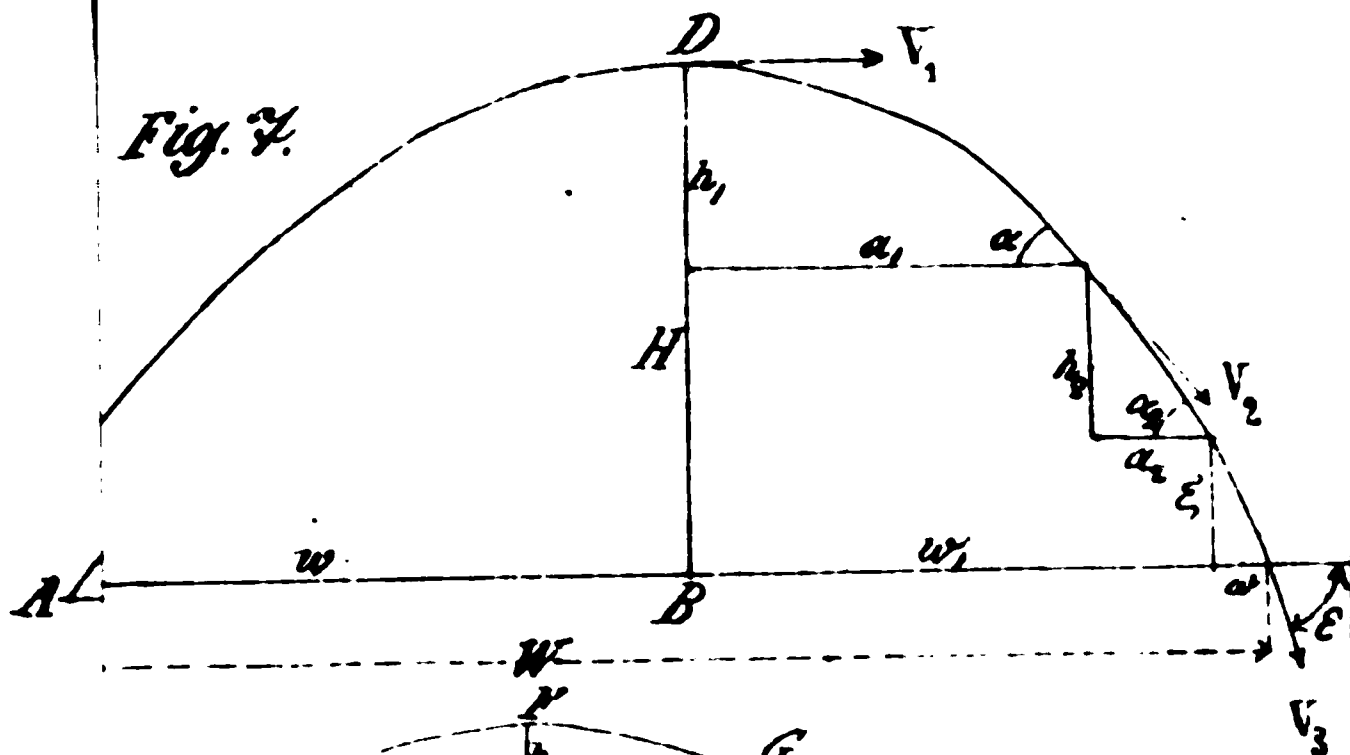
*Fig. 3.*



*Fig. 4.*



*Fig. 7.*



**IX.**

**Grid**











  
5101

4673

U, 46

**STORAGE AI**



